G. Valiron. — Théorie générale des Séries de Dirichlet (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

A. Buhl. — **Formules stokiennes** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Les formules stokiennes, comme le nom l'indique, sont des généralisations de la formule de Stokes ordinaire établie dans tous les Traités d'Analyse ou de Mécanique pour le cas de l'espace à trois dimensions. Elles se présentent sous forme d'égalités entre intégrales multiples, l'une de ces intégrales étant étendue à une *cloison* à $p - 1$ dimensions dans l'espace E_n, l'autre à la variété frontière, à $p - 2$ dimensions, de cette cloison.

Ces formules se peuvent engendrer par des transformations et associations répétées d'identités telles que

$$\int_c X dY = \int\int_s dX\, dY\,, \quad \int\int_s X dY\, dZ = \int\int\int_v dX\, dY\, dZ\,, \ldots \tag{1}$$

ce qui est de la plus haute importance pour l'esprit qui aime à remonter aux origines et aux principes.

La seconde des identités indiquées donne une formule stokienne qui impose immédiatement une forme générale des équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz; les formules stokiennes se conservent quand on y remplace les ∂ des dérivées partielles ordinaires par des D plus généraux qui sont les symboles de la dérivation covariante, d'où des formules en D qui sont celles de la Gravifique d'Einstein. Arriver là, très rapidement, en partant d'identités telles que (1) est, à coup sûr, digne de remarque.

A y regarder de près, la Mécanique classique a déjà utilisé des symétries analytiques du même genre; les équations canoniques et le théorème de Poisson ont une symétrie *antistokienne*. Les travaux de Poincaré, également admirables en Physique mathématique et en Mécanique céleste se sont appuyés sur cette opposition. Ces idées générales ont d'ailleurs reçu un commencement de développement en deux articles récemment publiés par *L'Enseignement mathématique* (T. 23, 1923, p. 268 et T. 24, 1924-25, p. 189).

N'oublions point la Théorie des Groupes que l'on peut aussi rapprocher avec fruit des formules stokiennes. Il y a même un parallélisme simple et intéressant à établir entre les grandes voies suivies par Lie d'une part et Einstein d'autre part. Bien des méthodes s'offrent pour faire de telles comparaisons, mais il y a un intérêt particulier à montrer que la formule de Stokes, née avec l'électromagnétisme d'Ampère, était bien la souche d'où pouvaient jaillir par la suite les plus importantes ramifications de la Géométrie et de la Physique mathématique. H. Fehr.

G. Valiron. — **Théorie générale des Séries de Dirichlet** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XVII). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 12 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Les séries de Dirichlet sont des séries d'exponentielles, chaque terme ayant un coefficient a_n et un exposant $-\lambda_n s$. Pour $\lambda_n = n$ ces séries se ramènent évidemment aux séries entières; pour $\lambda_n = \log n$ elles prennent la forme surtout considérée par Dirichlet, forme qui, avec les a_n tous égaux, conduit à la célèbre fonction ζ (s) de Riemann. Ceci suffit déjà amplement à montrer leur importance.

Bien que toutes les séries de Dirichlet ne soient évidemment pas du type où λ_n est égal à n, on se rend compte immédiatement que la théorie des séries entières a beaucoup guidé les recherches. La convergence d'une série entière n'a lieu que dans un cercle, c'est-à-dire dans une région du champ complexe située *du même côté* d'une circonférence ; la convergence d'une série de Dirichlet a lieu *du même côté* d'une droite d'où la notion du *demi-plan* de convergence. Nombre de théorèmes sur l'allure singulière d'une fonction analytique dans le voisinage du cercle de convergence se retrouvent ici dans le voisinage de la droite de convergence ; les résultats tayloriens de MM. Hadamard, Borel, Fabry, Mittag-Leffler,... en reçoivent comme un lustre complémentaire. Il en est de même des théorèmes d'Abel.

Les choses deviennent plus intéressantes encore avec les procédés d'extension analytique. On peut imaginer des déterminations des λ_n pour lesquelles certaines méthodes de prolongement analytique, nées à propos de séries entières, s'appliquent encore mieux aux séries de Dirichlet. Des méthodes de sommabilité déplacent avantageusement la droite de convergence, d'autres la font disparaître et permettent de prolonger la série en s, dans tout le champ complexe, en une étoile d'holomorphie qui a, en ce cas, ses rayons parallèles mais n'en correspond pas moins à l'étoile plus véritablement étoilée de M. Mittag-Leffler.

H. Bohr a relié l'existence même des séries de Dirichlet à des constructions arithmétiques diophantiques d'où il passe à de très originales considérations sur les fonctions quasi-périodiques. H. Weyl, si connu pour ses travaux parallèles à ceux d'Einstein, a également travaillé à cette partie d'une théorie qui, dominant à la fois la fonction à variable complexe et la fonction à variable réelle, présente une généralité propre à tenter l'esprit d'application dans ses manifestations les plus diverses. Il me semble, du moins, que M. Valiron nous a montré tout cela d'une manière fort remarquable.

A. Buhl (Toulouse).

T. Carleman. — **Les fonctions quasi-analytiques.** Leçons professées au Collège de France (Collection E. Borel). Un volume gr. in-8° de 116 pages. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

La théorie des fonctions quasi-analytiques a, dans le passé, des racines plus diverses qu'on ne le croit généralement. On en trouve un premier germe dans la Thèse de M. Emile Borel publiée il y a une trentaine d'années ; elle se rattache aux séries asymptotiques étudiées par Henri Poincaré dans ses *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (T. 1, chap. VII) et cela a déjà donné lieu à une fort remarquable exposition d'ensemble de M. Borel en ses *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe* analysées d'ailleurs en cette Revue (T. 20, 1918, p. 143). Le nouveau volume nous met au courant des progrès réalisés depuis la rédaction de ces dernières *Leçons*.

Le sujet, au fond, semble avoir ses assises dans les immenses progrès faits par la notion d'intégration, progrès qui, de par la nature même des choses, ne pouvaient avoir leur pendant du côté de la notion de dérivation. Dès lors le point de vue de Cauchy, à caractère intégral, était manifestement généralisable ; le point de vue de Weierstrass, à caractère différentiel, ne