2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

On a donc

$$\frac{h''' h'}{bc} = \frac{a}{b} - \frac{a' c''}{bc} \, .$$

$$h''' h' = ca - c'' a' \, .$$

Par permutation circulaire on a

$$\left\{ \begin{aligned} h' h'' &= ab - a'' b' \, , \\ h'' h''' &= bc - b'' c' \, , \\ h''' h' &= ca - c'' a' \, , \end{aligned} \right. \qquad (1)$$

c'est-à-dire

Théorème I. — *Le rectangle construit sur deux hauteurs d'un triangle quelconque est égal au rectangle construit sur les deux côtés correspondants, diminué du rectangle construit sur les projections de ces côtés l'un sur l'autre.*

Remarque. — Ce théorème est valable quels que soient les angles du triangle.

2. — Carré construit sur une hauteur d'un triangle.

Premier cas. — *Triangle* acutangle (fig. 2).

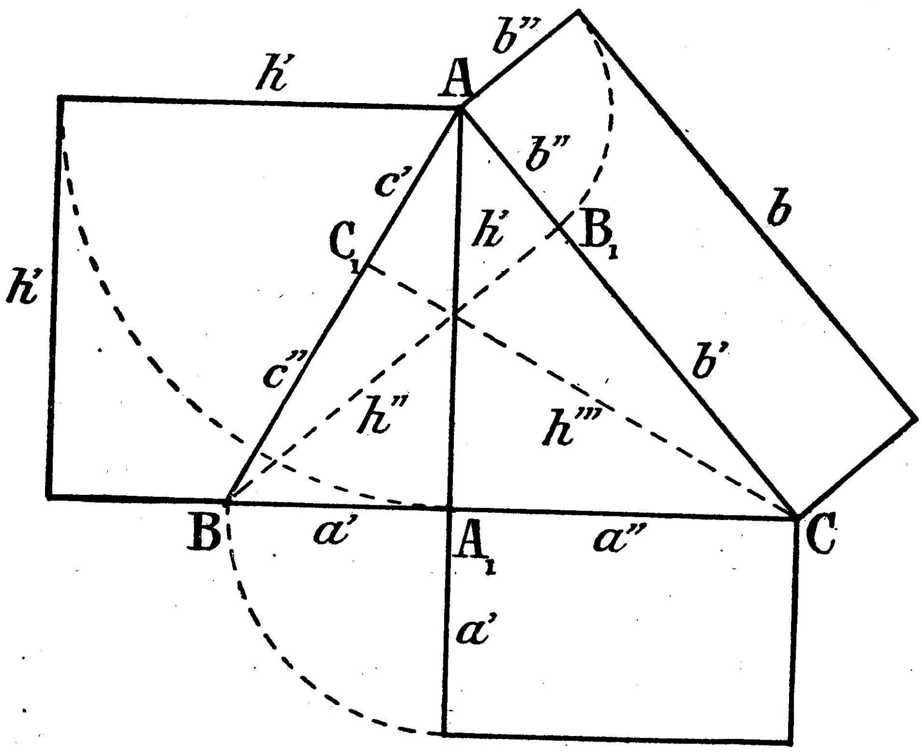

Fig. 2.

Soit ABC un triangle acutangle. D'après la première des formules du groupe (1), nous avons

$$h' h'' = ab - a'' b' \, .$$

Les triangles semblables AA_1C et BB_1C fournissent la relation

$$\frac{h'}{h''} = \frac{a''}{b'} .$$

Multiplions membre à membre

$$h'^2 = \frac{aa''b}{b'} - a''^2 = \frac{aa''(b' + b'')}{b'} - a''^2 ,$$

$$h'^2 = a''(a - a'') + \frac{aa''b''}{b'} .$$

Les quadrilatères ABA_1B_1, BCB_1C_1, CAC_1A_1 étant inscriptibles, le théorème des sécantes donne

$$aa'' = bb' ; \qquad bb'' = cc' ; \qquad cc'' = aa' .$$

Remplaçons aa'' par bb' dans h'^2, puis appliquons la permutation circulaire

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + bb'' , \\ h''^2 &= b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' + cc' , \\ h''^2 &= b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= c'c'' + bb' , \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME II. — *Le carré construit sur une hauteur d'un triangle acutangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui.*

SECOND CAS. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 3).

En appliquant successivement à chacune des formules du groupe (1) le même procédé que dans le premier cas et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit aux résultats ci-dessous

$$\alpha > 90° ,$$

$$\left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - bb'' , \\ h''^2 &= -b'b'' + cc'' , \\ h'''^2 &= -c'c'' + aa'' , \end{aligned}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{aligned} h'^2 &= a'a'' - cc' , \\ h''^2 &= -b'b'' + aa' , \\ h'''^2 &= -c'c'' + bb' . \end{aligned}\right. \qquad (2')$$

Dans le cas d'un triangle *obtusangle*, le carré construit sur une hauteur est donc équivalent à la *différence* des deux rectangles en question.

Les relations (2) et (2′) peuvent être exprimées par le théorème unique suivant:

THÉORÈME II′. — *Dans un triangle* QUELCONQUE, *le carré construit sur une hauteur est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant augmenté*

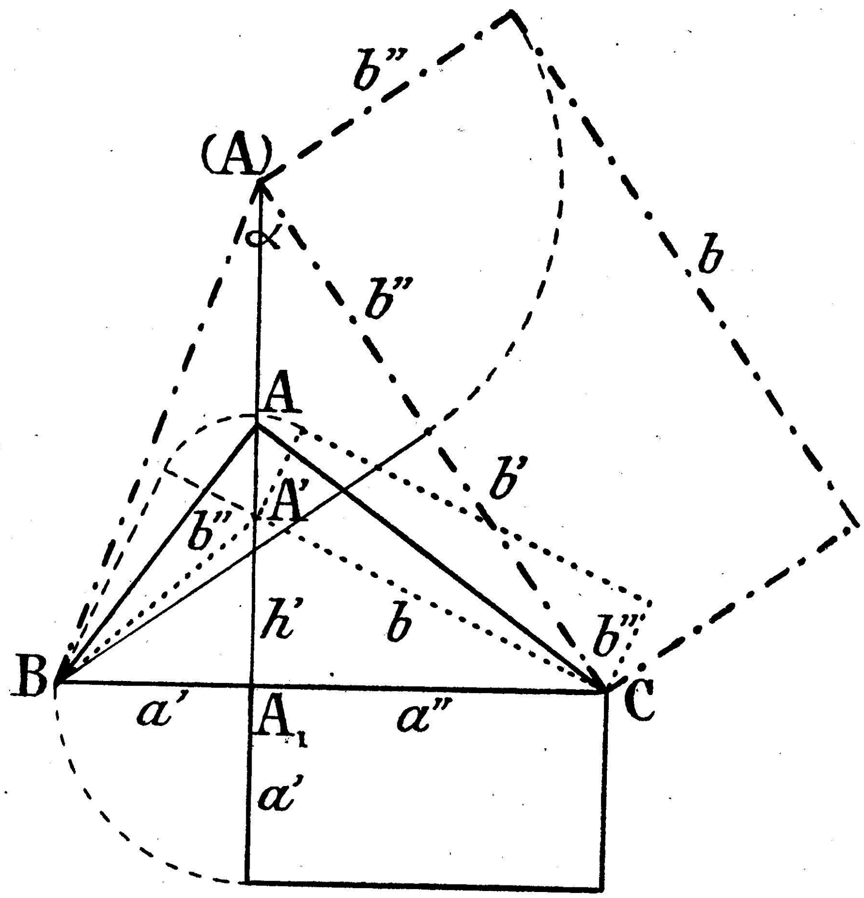

Fig. 3.

ou diminué du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, suivant que les trois angles sont aigus ou que l'angle traversé par la hauteur est obtus. Le carré d'une hauteur ne traversant pas l'angle obtus est égal au second rectangle moins le premier.

Remarque 1. — Si nous convenons d'envisager les segments

$$a' = BA_1\,,\quad a'' = A_1C\,;\quad b' = CB_1\,,\quad b'' = B_1A\,;$$

$$c' = AC_1\,,\quad c'' = C_1B$$

comme *positifs* quand ils sont dirigés dans le sens ABCA et *négatifs* dans le sens contraire ACBA, *les formules* (2) *sont alors valables dans tous les cas*, donc quels que soient les angles du triangle. On constate d'emblée qu'un segment *négatif* est situé en entier sur le prolongement du côté correspondant; un segment qui empiète seulement sur le prolongement du côté est positif.

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 3) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Le carré construit sur la hauteur d'un triangle rectangle est équivalent au rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a''} \ .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', que les sommets B et C restent fixes et les segments a' et a'' par conséquent invariables.

1° Si A s'éloigne de a, l'angle α *diminue*, la hauteur h' augmente et l'on a, d'après les formules (2) concernant le triangle *acutangle*

$$\alpha < 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a'' + bb''} \ .$$

Le carré construit sur la hauteur h' a ainsi *augmenté* du rectangle bb''.

2° Si par contre A se rapproche de a, l'angle α *augmente*, la hauteur h' diminue et l'on a, d'après les formules (2') applicables au triangle *obtusangle* en A

$$\alpha > 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a'' - bb''} \ ,$$

où b'' doit être pris en valeur absolue.

Dans ce cas, le carré construit sur la hauteur h' a *diminué* du rectangle bb''.

D'ailleurs, en faisant tendre α vers 90°, la première des formules (2) (ou (2')), c'est-à-dire

$$h'^2 = a'a'' \pm bb''$$

devient, puisqu'à la limite $b'' = 0$,

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad \underline{h'^2 = a'a''} \ .$$

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II′, comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle.*

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II′ — peut s'énoncer comme suit:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.*

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

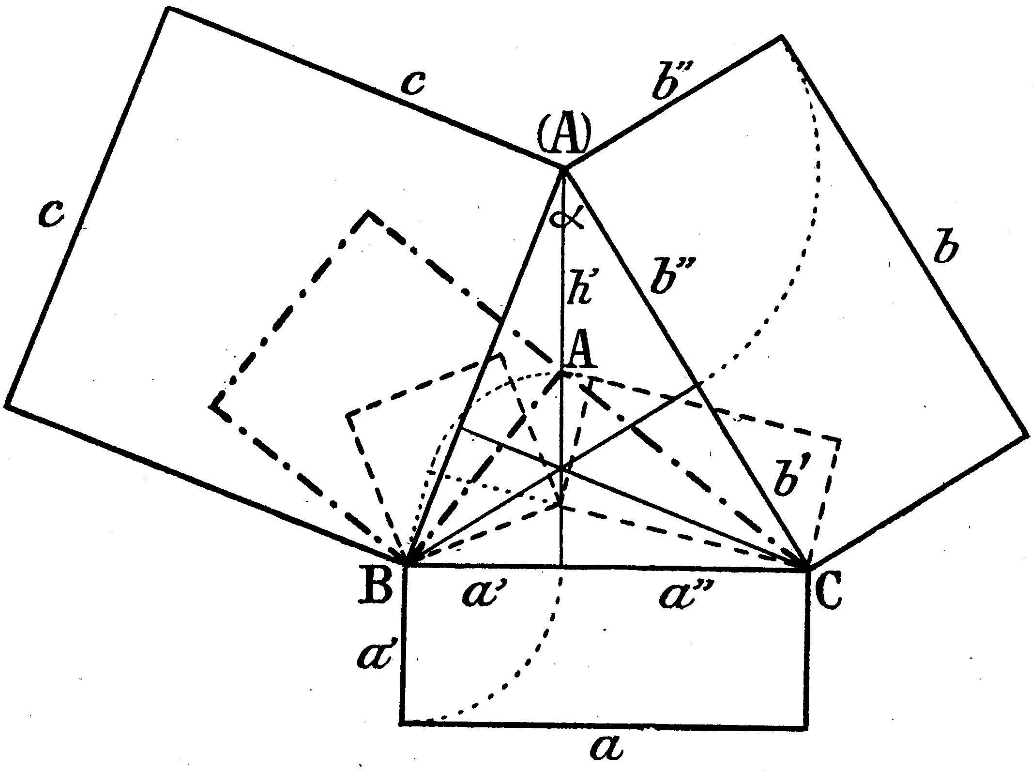

Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb''\ .$$