l'était pas autant. Ceci ne signifie pas, en effet, que du côté de la fonction quasi-analytique nous ne trouverons rien qui ressemble à un développement en série entière mais il y faudra le secours des méthodes boréliennes de prolongement, des fractions continues de Stieltjes et, tout particulièrement, des séries asymptotiques de Poincaré.

Il y a évidemment lieu de se demander si l'extension quasi-analytique ne repose pas sur des opérations d'une transcendance inexécutable ou bien si le quasi-analytique contient vraiment autre chose que l'analytique ; or les réponses à ces questions sont maintenant des plus simples et des plus explicites. Des séries de fractions rationnelles du plus élégant aspect, des séries trigonométriques représentent très naturellement des fonctions quasi-analytiques. D'ailleurs des séries de fractions rationnelles on peut passer aux séries de fonctions uniformes ; de telles suites peuvent admettre des fonctions limites d'une quasi-analyticité irréductible à l'analyticité.

N'épiloguons pas davantage sur ce livre, à la fois bel et bref, qu'on ne jugera bien que par une étude directe. Il parait très complet au point de vue bibliographique. Il renseigne sur de très nombreuses notes publiées, dans ces dernières années, aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, par MM. Borel, Denjoy, Holmgren, La Vallée-Poussin, Montel, Nevanlinna, Riesz,... et par M. Carleman lui-même.

C'est de la science très rigoureuse, très esthétique et, ne craignons pas de le dire, très objective. Des comparaisons extrêmement intéressantes seraient à faire avec les *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle* de M. S. Bernstein, leçons analysées dans notre dernier fascicule (ce tome, p. 141). Ainsi, d'une part, la variable complexe semble perdre du terrain, mais elle a créé l'analytique qui se révèle fécond en généralisations ; l'idée de perte n'a donc aucune raison d'être, les progrès des théories en litige n'apportant partout que gains et perfectionnements.

A. Buhl (Toulouse).

E. Borel. — **Calcul des Probabilités. Applications à l'Arithmétique et à la Théorie des Fonctions.** — Tome II, fascicule I du *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* publié par M. Emile Borel avec la collaboration de L. Blaringhem, C.-V.-L. Charlier, R. Deltheil, P. Dubreil, M. Fréchet, H. Galbrun, J. Haag, R. Lagrange, F. Perrin, P. Traynard. — Un vol. gr. in-8° de 104 pages. Prix : 17 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Brillant et intéressant fascicule rédigé, d'après les leçons de M. Emile Borel, par M. Paul Dubreil, élève de l'Ecole normale supérieure. Il débute par une application de la loi des écarts à l'étude des nombres décimaux ; il s'agit de la distribution des chiffres dans ces nombres, distribution certaine tant qu'elle résulte d'un calcul précis et qui pourrait continuer à être certaine si le calcul était continué, mais qui, dans le cas contraire, n'est plus que probable, la probabilité correspondant ici non à un manque de détermination, mais à l'ignorance où nous sommes de celle-ci. Il y a une correspondance remarquable entre les nombres à distribution improbable et les ensembles de mesure nulle et l'on ne peut juger complètement du caractère probable ou improbable d'une distribution sans considérations sur le système de numération employé. Et voilà déjà l'arithmétique, les ensembles et les probabilités curieusement agglomérés.

Les probabilités dénombrables interviennent rapidement ; on peut rechercher, dans une suite illimitée de décimales, des arrangements finis et ce au moyen d'une infinité dénombrable d'épreuves ; ou bien des arrangements dénombrables au moyen d'épreuves en nombre fini ; ou bien encore des arrangements dénombrables au moyen d'épreuves en infinité dénombrable. Le système binaire offre des exemples simples dans ces trois ordres d'idées et l'on peut ensuite passer aisément au cas du système décimal. De nouveaux ensembles de mesure nulle naissent ici de manière fort naturelle. Le nombre susceptible d'éveiller l'attention fait généralement partie de tels ensembles et cependant son existence arithmétique ne fait aucun doute. On pourrait même, si on le désirait, retourner la thèse et recréer la notion de mesure nulle sur la théorie de faits, arithmétiques ou autres, à probabilité nulle, quoique à existence possible et même certaine puisqu'il y a des choses certainement possibles qui n'arrivent jamais. Peut-être ici devrais-je m'excuser de dépasser la pensée de M. Borel, lequel se tient strictement sur le terrain mathématique, mais il ne peut déplaire à l'éminent auteur qu'on trouve l'occasion de paraphraser son exposé. Même arithmétisé, le Calcul des Probabilités est encore, par excellence, une science d'applications qui se peuvent apercevoir sous les formes les plus diverses.

Les fractions continues interviennent ensuite et c'est encore tout ce qu'il y a de plus naturel puisqu'il s'agit d'un mode de représentation arithmétique peu différent en somme du mode numérique ordinaire. Les quotients incomplets des fractions en question ont des modes de croissance avec des probabilités pour que cette croissance soit plus ou moins rapide que celle de fonctions données. On peut passer de là à des comparaisons probabilitaires entre croissances fort quelconques et atteindre aussi un paradoxe de Zermelo sur les mesures de certains ensembles géométriques, mesures qui ne semblent pas coïncider suivant le tour adopté pour le raisonnement. Le paradoxe n'est qu'apparent. Comme l'a fait remarquer, une fois de plus, M. Zaremba (voir l'analyse du fascicule XV du « Mémorial ») on confond alors certaines notions avec d'autres plus générales.

Tout ceci doit suffire à laisser transparaître toutes les richesses des aperçus de M. Borel. Les chiffres souvent invoqués pour leur précision peuvent aussi évoquer l'idée d'une vie ondoyante et aléatoire.

Le volume se termine par quatre Notes complétant certains exposés du corps de l'ouvrage. Ici je ne retiendrai que la première qui explique brièvement les termes et les lemmes fondamentaux de la théorie des ensembles. Ainsi l'amateur de probabilités n'aura rien à chercher hors de ces pages si originales et captivantes.

A. Buhl (Toulouse).

J. Haag. — **Calcul des Probabilités. Applications au tir.** — Tome IV, fascicule I du *Traité* mentionné à l'article précédent. Un vol. gr. in-8° de VI-184 pages, 19 figures, 8 tableaux numériques et 10 diagrammes. Prix : 30 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1926.

Les officiers d'artillerie ont naturellement une formation mathématique ; la dernière guerre a fait naître la réciproque et des théoriciens des mathématiques sont devenus artilleurs, la contribution ainsi apportée à la balistique étant aussi notable qu'intéressante. Le volume de M. Haag paraît être né dans ces circonstances ; nous y trouvons aussi des noms d'analystes très