5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

La relation (4) devient

$$a'^2 + b^2 = a''^2 + c^2 ,$$

ou

$$b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2 , \tag{5}$$

c'est-à-dire

Théorème V. — *Dans un triangle* rectangle, *la différence des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égale à la différence des carrés construits sur les segments déterminés sur l'hypoténuse par la hauteur correspondante.*

5. — Démonstration des théorèmes II, III et IV basée sur le théorème de Pythagore généralisé.

En nous basant sur le *théorème de Pythagore généralisé*, nous pouvons démontrer le théorème II — d'où nous déduirons le théorème I — puis les théorèmes III et IV. Nous envisagerons le cas du triangle *acutangle.*

1° Pour le *théorème II* (fig. 2):

Appliqué au côté c, le théorème de Pythagore généralisé donne

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' .$$

Or

$$c^2 = h'^2 + a'^2 .$$

En remplaçant on a

$$h'^2 + a'^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$h'^2 = a^2 - a'^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

$$h'^2 = (a' + a'')a - a'^2 + b^2 - 2aa'' =$$

$$= a'(a - a') - aa'' + b^2 .$$

Mais

$$aa'' = bb' .$$

Par suite

$$h'^2 = a'a'' - bb' + b^2 = a'a'' + b(b - b') ,$$

$$\underline{h'^2 = a'a'' + bb''}(= a'a'' + cc')$$

C'est la relation du théorème II.

2° Déduction du *théorème I* du théorème II (fig. 1):

$$h'^2 = a'a'' + cc' = a'(a - a') + \frac{cc''.c'}{c''} .$$

Mais

$$cc'' = aa' .$$

$$h'^2 = aa' - a'^2 + \frac{aa'.c'}{c''} = \frac{aa'c''}{c''} + \frac{aa'c'}{c''} - a'^2 ,$$

$$h'^2 = \frac{aa'.(c'' + c')}{c''} - a'^2 = \frac{aa'c}{c''} - a'^2 .$$

Or

$$\frac{h'}{h'''} = \frac{a'}{c''} ,$$

d'où, en divisant membre à membre

$$\underline{h' \cdot h''' = ac - a'c''} ,$$

ce qui est la relation du théorème I.

3° Pour le *théorème III* (fig. 4):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

$$c^2 = a(a' + a'') + b(b' + b'') - 2aa'' =$$
$$= aa' + bb' - aa'' + bb'' .$$

Mais

$$bb' = aa'' .$$

Par suite

$$\underline{c^2 = aa' + bb''}(= aa' + cc') .$$

C'est la relation du théorème III.

4° Pour le *théorème IV* (fig. 5):

En appliquant le théorème de Pythagore généralisé aux trois côtés, on obtient successivement

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bb'' ,$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2cc'' ,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aa'' ,$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2aa'' - 2bb'' - 2cc'' ,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a'') + b(2b'') + c(2c'') ,$$

ou aussi, puisque $aa'' = bb'$, $bb'' = cc'$, $cc'' = aa'$,

$$a^2 + b^2 + c^2 = a(2a') + b(2b') + c(2c') .$$

Ces deux relations signifient que:

La somme des carrés construits sur les côtés d'un triangle est égale à la somme des trois rectangles construits sur chaque côté et le double d'un des segments correspondants, les trois segments devant être non consécutifs.

Chacune des deux relations précédentes conduit au théorème IV. La seconde peut s'écrire

$$(a' + a'')^2 + (b' + b'')^2 + (c' + c'')^2 =$$
$$= 2[(a' + a'')a' + (b' + b'')b' + (c' + c'')c'] ,$$

d'où résulte

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) = 2[a'^2 + b'^2 + c'^2] .$$

Par suite

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} ,$$

ce qui est la relation du théorème IV.

5° Le *théorème V* peut se démontrer directement comme suit:

On a

$$b^2 = aa'' \qquad \text{et} \qquad c^2 = aa' ,$$

d'où

$$b^2 - c^2 = a(a'' - a') = (a'' + a')(a'' - a') ,$$

ou

$$\underline{b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2} .$$

6. — Conséquences résultant des formules du groupe (3).

1° Menons les hauteurs h' et h'' issues des sommets A et B d'un triangle ABC et prolongeons-les jusqu'à leurs points d'intersection T et K avec les circonférences décrites sur les côtés opposés BC et AC comme diamètres. Puis dessinons des circonférences avec les extrémités A et B du troisième côté comme centres et leurs distances à ces points K et T comme rayons (fig. 6).

Soit M un point d'intersection de celles-ci. D'après la troisième des formules (3) on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

ou

$$c^2 = \overline{BT}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 .$$