SUR QUELQUES FORMULES VECTORIELLES RELATIVES AUX SURFACES RÉGLÉES

Autor(en): **Lainé, l'Abbé E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20672

SUR QUELQUES FORMULES VECTORIELLES RELATIVES AUX SURFACES RÉGLÉES

PAR

l'Abbé E. LAINÉ (Angers).

Le calcul vectoriel, outre les simplifications incontestables qu'il introduit dans l'exposé général de la théorie analytique des courbes et surfaces [1], présente parfois l'avantage de conduire par une voie naturelle, pour des problèmes différents en apparence, à des formules finales identiques: on peut ainsi être amené à des généralisations intéressantes, ou, en tout cas, à une vue plus synthétique des propriétés étudiées. Nous allons en donner un exemple simple.

Considérons la surface réglée Σ définie, relativement à un système d'axes rectangulaires $Oxyz$, par les équations

$$x = a_1 + b_1 u \ , \qquad y = a_2 + b_2 u \ , \qquad z = a_3 + b_3 u \ ,$$

où a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 sont fonctions d'un paramètre v. On distingue, pour l'étude de cette surface, le cas de la surface *gauche* et celui de la surface *développable*. Dans le premier cas, il existe sur la surface une ligne remarquable, lieu des *points centraux* des génératrices, la *ligne de striction*. Dans le second cas, la surface possède une ligne singulière, l'*arête de rebroussement*, enveloppe des génératrices.

Employons les notations vectorielles. Soient $\vec{a}(v)$ et $\vec{b}(v)$ les vecteurs de composantes respectives (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3), M un point de la surface réglée. On aura

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}u \ .$$

[1] Cf. par exemple *Leçons de Géométrie vectorielle*, de M. BOULIGAND. Paris, Vuibert, 1924.

C'est l'équation vectorielle de la surface Σ; on peut toujours, sans nuire à la généralité, supposer que le vecteur $\vec{b}$ est de longueur *un* et c'est ce que nous ferons par la suite.

Prenons d'abord le cas de la surface développable. On doit pouvoir déterminer u en fonction de v, de telle sorte que la courbe correspondante de Σ soit tangente en chacun de ses points à la génératrice qui passe en ce point: cette génératrice étant parallèle au vecteur $\vec{b}$, on devra donc avoir

$$\frac{d\vec{a}}{dv} + \vec{b}\frac{du}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv} = \rho\vec{b} \; ,$$

ρ désignant un scalaire convenablement choisi. Multiplions scalairement les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{d\vec{b}}{dv}$. En tenant compte de l'hypothèse

$$(\vec{b})^2 = 1 \qquad \text{d'où} \qquad \vec{b} \, . \frac{d\vec{b}}{dv} = 0 \text{ [1]} \, ,$$

on aura finalement

$$\frac{d\vec{b}}{dv} \cdot \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv}\right) = 0 \; ,$$

telle est l'équation qui définit l'arête de rebroussement.

Avant de passer au cas de la surface gauche, rappelons d'abord quelques formules d'algèbre vectorielle.

Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ trois vecteurs de composantes (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) respectivement. On désigne par la notation

$$(\vec{a} \, , \vec{b} \, , \vec{c})$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \; ;$$

on vérifie alors la relation

$$(\vec{a} \, , \vec{b} \, , \vec{c}) = \vec{a} \, . (\vec{b} \wedge \vec{c}) \; .$$

---

[1] Suivant les notations de M. Bouligand, nous représentons par un point la multiplication *scalaire*, et par le symbole $\wedge$ la multiplication *vectorielle*.

On voit aussi immédiatement que l'équation

$$(\vec{a}\,,\,\vec{b}\,,\,\vec{c}) = 0$$

exprime que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont coplanaires.

Soient, d'autre part, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, quatre vecteurs arbitraires. On aura l'*identité de Lagrange généralisée*

$$(\vec{a}\,.\,\vec{b})(\vec{\alpha}\,.\,\vec{\beta}) - (\vec{a}\,.\,\vec{\beta})(\vec{\alpha}\,.\,\vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{\alpha})\,.\,(\vec{b} \wedge \vec{\beta}) \ ,$$

dont la vérification ne comporte aucune difficulté.

Ceci posé, soit P un point quelconque du plan tangent en M à la surface Σ. On aura

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,,\,\vec{b}\,,\,\frac{d\vec{a}}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv}\right) = 0 \ ,$$

ou

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}\,.\left[\vec{b} \wedge \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv}\right)\right] = 0 \ .$$

La normale en M est donc parallèle au vecteur

$$\vec{b} \wedge \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv}\right) \ .$$

On en déduit, en passant, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface Σ soit développable: la normale devant alors avoir une direction indépendante de u, les vecteurs

$$\vec{b} \wedge \frac{d\vec{a}}{dv} \quad \text{et} \quad \vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}$$

doivent être colinéaires, donc les vecteurs

$$\vec{b}\ , \quad \frac{d\vec{a}}{dv} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{b}}{dv}$$

sont coplanaires, et par suite on a

$$\left(\vec{b}\,,\,\frac{d\vec{a}}{dv}\,,\,\frac{d\vec{b}}{dv}\right) = 0 \ :$$

c'est la condition cherchée.

Supposons donc

$$\left(\vec{b}, \frac{d\vec{a}}{dv}, \frac{d\vec{b}}{dv}\right) \neq 0 .$$

Quand le point M s'éloigne à l'infini sur une génératrice Δ, la normale devient parallèle au vecteur $\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}$: la normale au point central étant, par définition, perpendiculaire à ce vecteur, l'argument u du point central est donné par l'équation

$$\left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{a}}{dv} + u\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right) \cdot \left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right) = 0 ,$$

qu'on peut encore écrire

$$\left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{a}}{dv}\right) \cdot \left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right) + u\left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right)^2 = 0 .$$

Telle est l'équation qui définit la ligne de striction.

On a d'ailleurs, d'après l'identité de Lagrange généralisée,

$$\left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{a}}{dv}\right) \cdot \left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right) = (\vec{b})^2\left(\frac{d\vec{a}}{dv} \cdot \frac{d\vec{b}}{dv}\right) - \left(\vec{b} \cdot \frac{d\vec{b}}{dv}\right)\left(\frac{d\vec{a}}{dv} \cdot \vec{b}\right)$$

$$= \frac{d\vec{a}}{dv} \cdot \frac{d\vec{b}}{dv} ,$$

et de même

$$\left(\vec{b} \wedge \frac{d\vec{b}}{dv}\right)^2 = \left(\frac{d\vec{b}}{dv}\right)^2 .$$

L'équation de la ligne de striction prend donc la forme

$$\frac{d\vec{b}}{dv} \cdot \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u\frac{d\vec{b}}{dv}\right) = 0 .$$

En résumé, sur la surface réglée

$$\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}u ,$$

où l'on suppose

$$(\vec{b})^2 = 1 ,$$

une seule et même équation

$$\frac{d\vec{b}}{dv} \cdot \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u \frac{d\vec{b}}{dv} \right) = 0 \ .$$

représente l'arête de rebroussement si la surface est développable et la ligne de striction si la surface est gauche.

On s'explique cette particularité en remarquant que, dans l'un et l'autre cas, la ligne considérée peut être définie comme le lieu du point de chaque génératrice qui est à la distance minimum des génératrices infiniment voisines.

EN RELISANT UN MÉMOIRE DE PLÜCKER SUR LA THÉORIE DES SURFACES

PAR

Gino LORIA (Gênes, Italie).

Dans sa *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* (Journal de Crelle, T. IX, 1831, p. 124-135) [1] PLÜCKER a posé les fondements du système de coordonnées pour les plans de l'espace; la structure complète n'a été donnée par lui que quinze ans plus tard dans son ouvrage *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf, 1846). Dans la *Note* citée l'illustre géomètre ne s'est pas arrêté aux problèmes fondamentaux relatifs aux points, aux droites et aux plans, mais il a préféré transformer les formules classiques de la théorie de la courbure des surfaces dues à EULER et MONGE en d'autres applicables dans l'hypothèse que les surfaces étaient considérées comme enveloppes de plans: au contraire

---

[1] Voir aussi J. PLÜCKER, *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, I Band (Leipzig, 1895), p. 224-234.