

EN RELISANT UN MÉMOIRE DE PLÜCKER SUR LA THÉORIE DES SURFACES

Autor(en): **Loria, Gino**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20673>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

une seule et même équation

$$\frac{d\vec{b}}{dv} \cdot \left(\frac{d\vec{a}}{dv} + u \frac{d\vec{b}}{dv} \right) = 0 .$$

représente l'arête de rebroussement si la surface est développable et la ligne de striction si la surface est gauche.

On s'explique cette particularité en remarquant que, dans l'un et l'autre cas, la ligne considérée peut être définie comme le lieu du point de chaque génératrice qui est à la distance minimum des génératrices infiniment voisines.

EN RELISANT UN MÉMOIRE DE PLÜCKER SUR LA THÉORIE DES SURFACES

PAR

Gino LORIA (Gênes, Italie).

Dans sa *Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes* (Journal de Crelle, T. IX, 1831, p. 124-135)¹ PLÜCKER a posé les fondements du système de coordonnées pour les plans de l'espace; la structure complète n'a été donnée par lui que quinze ans plus tard dans son ouvrage *System der Geometrie des Raumes* (Düsseldorf, 1846). Dans la *Note* citée l'illustre géomètre ne s'est pas arrêté aux problèmes fondamentaux relatifs aux points, aux droites et aux plans, mais il a préféré transformer les formules classiques de la théorie de la courbure des surfaces dues à EULER et MONGE en d'autres applicables dans l'hypothèse que les surfaces étaient considérées comme enveloppes de plans: au contraire

¹ Voir aussi J. PLÜCKER, *Gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen*, I Band (Leipzig, 1895), p. 224-234.

ce thème est seulement touché dans le *System* (p. 27) avec la promesse (qui n'a pas été maintenue) de revenir après sur le même sujet.

PLÜCKER se sert des formules trouvées pour établir des propositions nouvelles sur la courbure des surfaces; à un certain moment, avec un passage rapide et qui ne paraît pas assez justifié, il passe à traiter, comme corollaires, des questions analogues pour les courbes gauches; de cette manière il croit pouvoir considérer comme établi le théorème suivant:

*Le rayon de courbure d'une courbe donnée quelconque en un point donné quelconque est égal à la somme des deux rayons de courbure correspondants des deux projections planes de la courbe sur deux plans quelconques, perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de la courbe proposée dans le point donné*¹.

Or, qui se rappelle que dans l'expression du rayon de courbure d'une courbe plane ou gauche on a une ambiguïté de signe qu'on enlève seulement par des conventions fondées sur des considérations délicates que l'on cherche en vain dans la *Note* de PLÜCKER, éprouve des doutes sur la vérité de cet énoncé. Pour les confirmer ou les infirmer, on peut se servir des considérations suivantes.

Soit Γ une courbe arbitraire représentée, à l'aide de son arc s , par les formules

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s);$$

soit M un point de Γ tel que la tangente correspondante de la courbe soit parallèle à l'axe Oy ; dans ce point on aura

$$x' = 0, \quad y' = 1, \quad z' = 0; \quad (1)$$

et comme l'identité

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$$

a comme corollaire

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0,$$

on a encore

$$y'' = 0. \quad (2)$$

¹ *Abhandlungen* citées, I Bd., p. 232.

Comme plans sur lesquels on effectue les projections dont parle le théorème de PLÜCKER, on peut évidemment se servir des plans xy et yz . Soit R le rayon de courbure de la courbe Γ au point M ; R' et R'' les rayons de courbure aux points correspondants M' et M'' des projections Γ' et Γ'' . On a en général

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} \quad (3)$$

$$R' = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'} \quad R'' = \frac{(z'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{z'y'' - z''y'} ; \quad (4)$$

mais, en appliquant les relations (1) et (2), ces expressions deviennent

$$R = \frac{1}{\sqrt{x''^2 + z''^2}} , \quad R' = \frac{1}{x''} , \quad R'' = \frac{1}{z''}$$

d'où il s'ensuit

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{R'^2} + \frac{1}{R''^2} . \quad (5)$$

C'est une relation bien différente de celle énoncée par PLÜCKER, car elle exprime algébriquement le théorème suivant: *Le carré de la courbure de la courbe donnée dans un point quelconque est égale à la somme des carrés des courbures correspondantes de ses deux projections orthogonales sur deux plans quelconques perpendiculaires entre eux et parallèles à la tangente de la courbe proposé dans le point donné.* Cet énoncé équivaut au suivant: *les hypothèses étant les mêmes, le rayon de courbure de la courbe proposée est la hauteur d'un triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit les rayons de courbure des projections.*

Sous cette forme on trouve la proposition dont il s'agit dans un ouvrage italien antérieur à la *Note* de PLÜCKER¹ et que cet éminent mathématicien n'a certainement pas connu.

Mais dans ce même ouvrage on trouve une autre proposition analogue à celle de PLÜCKER et sur la vérité de laquelle on peut

¹ C. SERENI, *Trattato di geometria descrittiva* (Rome, 1826), p. 179-180.

avoir des doutes analogues à ceux que nous avons exposés plus haut; en voici l'énoncé: *Si on fait les projections orthogonales d'une courbe quelconque sur deux plans orthogonaux entre eux et parallèles à une des normales de la courbe, le rayon de courbure correspondant est égal à la somme des rayons de courbure des projections.*

Pour vérifier l'exactitude de ce théorème nous nous servirons des formules précédentes et nous supposerons encore que comme plans de projections on prenne les plans xy et yz ; la condition du théorème peut s'énoncer en disant que le plan normal au point considéré est parallèle à l'axe Oy ; on a en conséquence:

$$y' = 0, \quad x'^2 + z'^2 = 1, \quad x'x'' + z'z'' = 0; \quad (6)$$

les formules (4) deviennent

$$R' = \frac{x'^2}{y''}, \quad R'' = \frac{z'^2}{y''},$$

d'où l'on tire

$$R' + R'' = \frac{1}{y''};$$

or, comme l'expression (3) ne subit aucun changement en conséquence des hypothèses (6), on a évidemment

$$R' + R'' \neq R,$$

à moins qu'on ait $x'' = 0$, $z'' = 0$, ce qui n'a pas lieu en général.

Pour confirmer ce résultat négatif, on peut ajouter ce qui suit: Du théorème que nous venons de critiquer SERENI tire le corollaire suivant: *Dans un point où une des normales de la courbe considérée est parallèle au plan de projection, le rayon de courbure de la courbe est égal au correspondant de sa projection, divisé par le carré du cosinus de l'angle que le plan osculateur au point considéré forme avec le plan de projection.* Or il est facile de voir qu'une double application de cette proposition ramène au théorème précédent: par suite, en voulant vérifier ce théorème, on peut commencer par décider si ce corollaire est vrai ou non. Remarquons

à cet effet que, à cause de l'hypothèse (6), l'équation du plan osculateur au point considéré est (X, Y, Z étant les coordonnées courantes)

$$(X - x)y''z' + (Y - y)(x'z'' - x''z') - (Z - z)x'y'' = 0 ;$$

par suite le cosinus de l'angle γ qu'il fait avec le plan xy est donnée par la formule

$$\cos \gamma = \frac{-x'y''}{\sqrt{y''^2 z'^2 + (x'z'' - x''z')^2 + x'^2 y''^2}},$$

ou bien

$$\cos \gamma = - \frac{x'y''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}} = - R x' y'' .$$

On a donc

$$R = - \frac{\cos \gamma}{x' y''} \quad R' = \frac{x'^2}{y''},$$

et par suite

$$\frac{R}{R'} = - \frac{\cos \gamma}{x'^3},$$

formule en désaccord avec le corollaire cité.

Les énoncés de SERENI, comme celui de PLÜCKER, ne sont donc pas exacts.

Gênes, avril 1926.

¹ L. c., p. 182.