NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

M^{lle} M. Byck dans sa note « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants [1] » attire l'attention sur la relation:

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} & \dots \\ \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} & \dots \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & \dots \\ x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ 0 & 0 & v_2 & w_2 & \dots \\ v_1 & w_1 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix} . \quad (1)$$

Parmi toutes ses généralisations [2] possibles nous notons ici seulement la suivante.

En décomposant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1_{11} & \dots & 1_{1,n_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \dots & 1_{n_1, n_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2_{11} & \dots & 2_{1,n_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 2_{n_2 1} & \dots & 2_{n_2, n_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{11} & \dots & p_{1,n_p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{n_p 1} & \dots & p_{n_p, n_p+1} \\ \mathbf{1}_{11} & \dots & \mathbf{1}_{1,n_1+1} & \mathbf{2}_{11} & \dots & \mathbf{2}_{1,n_2+1} & \mathbf{p}_{11} & \dots & \mathbf{p}_{1,n_p+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \mathbf{1}_{p,1} & \dots & \mathbf{1}_{p,n_1+1} & \mathbf{2}_{p,1} & \dots & \mathbf{2}_{p,n_2+1} & \mathbf{p}_{p,1} & \dots & \mathbf{p}_{p,n_p+1} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(p-1)n_1+(p-2)n_2+\dots+n_{p-1}} \quad (2)$$

[1] *L'Enseignement mathém.*, t. 24, 1924–25.

[2] Ici nous ne prenons pas les relations du type

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 d_1 & b_1 c_1 & e_1 h_1 & f_1 g_1 \\ a_2 d_2 & b_2 c_2 & e_2 h_2 & f_2 g_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} .$$

parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier du type (1).

d'après les mineurs, constitués des colonnes renfermées entre deux traces verticales voisines, nous trouverons:

$$\Delta = \left\| \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{ccc} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1,n_1+1} \\ \mathbf{1}_{11} & \cdots & \mathbf{1}_{1.n_1+1} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 2_{11} & \cdots & 2_{1,n_2+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2,n_2+1} \\ \mathbf{2}_{11} & \cdots & \mathbf{2}_{1,n_2+1} \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \vdots \\ p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p,n_p+1} \\ \mathbf{p}_{11} & \cdots & \mathbf{p}_{1,n_p+1} \end{array} \right| \end{array} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \begin{array}{cccc} \left| \begin{array}{ccc} 1_{11} & \cdots & 1_{1,n_1+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 1_{n_1 1} & \cdots & 1_{n_1,n_1+1} \\ \mathbf{1}_{p1} & \cdots & \mathbf{1}_{p,n_1+1} \end{array} \right| & \left| \begin{array}{ccc} 2_{11} & \cdots & 2_{1\,n_2+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 2_{n_2 1} & \cdots & 2_{n_2,n_2+1} \\ \mathbf{2}_{p1} & \cdots & \mathbf{2}_{p.n_2+1} \end{array} \right| & \cdots & \left| \begin{array}{ccc} p_{11} & \cdots & p_{1,n_p+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ p_{n_p 1} & \cdots & p_{n_p,n_p+1} \\ \mathbf{p}_{p1} & \cdots & \mathbf{p}_{p,n_p+1} \end{array} \right| \end{array} \end{array} \right\| . \qquad (3)$$

D'autre part, la décomposition du déterminant Δ d'après les mineurs, constitués des lignes renfermées entre chaques deux traces horizontales voisines, donne

$$\Delta = \sum (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+p(1+n_1+\cdots+n_p)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \cdots x_{i_p}^{(p)} \cdot \mathrm{X}_{i_1 i_2 \cdots i_p}, \qquad (4)$$

où

$$x_{i_\beta}^{(\alpha)} = \left| \begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,i_\beta-1}, & \alpha_{1,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{1,n_\beta+1} \\ \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2,i_\beta+1}, & \alpha_{2,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{2,n_\beta+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n_\beta 1} & \cdots & \alpha_{n_\beta,i_\beta-1}, & \alpha_{n_\beta,i_\beta+1} & \cdots & \alpha_{n_\beta,n_\beta+1} \end{array} \right| \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ \ldots\ p)\ ,$$

$$\mathrm{X}_{i_1 i_2 \cdots i_p} = \left| \begin{array}{cccc} \mathbf{1}_{1i_1} & \mathbf{1}_{2i_2} & \cdots & \mathbf{1}_{1i_p} \\ \mathbf{1}_{2i_1} & \mathbf{1}_{2i_2} & \cdots & \mathbf{1}_{2i_p} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{1}_{pi_1} & \mathbf{1}_{pi_2} & \cdots & \mathbf{1}_{pi_p} \end{array} \right| \qquad (i_\gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_\gamma)\ .$$

L'égalité des expressions (3) et (4) est une généralisation du théorème connu de Sylvester; car, si nous faisons:

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n\ ,$$

$$l_{hi} = m_{hi} = x_{hi}\ ; \qquad \mathbf{l}_{ji} = \mathbf{m}_{ji} = x_{n+j,i}\ ;$$

$$l_{h,n+1} = x_{h,n+l}\ , \qquad \mathbf{k}_{j,n+1} = x_{n+j,n+k}$$

$$(h,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\ ;\quad j,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2,\ \ldots,\ p\ ;\quad \mathbf{k},\ \mathbf{l},\ \mathbf{m} = \mathbf{1},\ \mathbf{2},\ \ldots,\ \mathbf{p})\ ,$$

cette égalité prendra la forme:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{vmatrix}, & \ldots, & \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{vmatrix} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{vmatrix}, & \ldots, & \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix} \end{array} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \cdots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \cdots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \cdots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \cdots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \cdots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \cdots & x_{n+p,n+p} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}^{p-1} .$$

NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. Krawtchouk (Kieff).

Théorème I. *Soient* B *et* Γ *deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe* ζ; *soit de plus* n *le rapport de similitude de ces cercles,* α *leurs centres de similitude et*