

# NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

Autor(en): **Krawtchouk, M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-20674>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# NOTE SUR LES DÉTERMINANTS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

M<sup>lle</sup> M. Byck dans sa note « Sur les déterminants dont les éléments sont des déterminants<sup>1</sup> » attire l'attention sur la relation:

$$\begin{vmatrix} \left| \begin{matrix} v_1 & w_1 \\ x_1 & y_1 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} v_2 & w_2 \\ x_1 & y_1 \end{matrix} \right| & \dots & \dots & \dots \\ \left| \begin{matrix} v_1 & w_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} v_2 & w_2 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right| & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & t_1 & u_1 & \dots \\ x_2 & y_2 & t_2 & u_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & v_2 \cdot w_2 & \dots & \dots \\ v_1 \cdot w_1 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (1)$$

Parmi toutes ses généralisations<sup>2</sup> possibles nous notons ici seulement la suivante.

En décomposant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1_{11} \dots 1_{1,n_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} \dots 1_{n_1, n_1+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2_{11} \dots 2_{1, n_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 2_{n_2 1} \dots 2_{n_2, n_2+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{11} \dots P_{1, n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & P_{n_p 1} \dots P_{n_p, n_p+1} \\ 1_{11} \dots 1_{1, n_1+1} & 2_{11} \dots 2_{1, n_2+1} & \dots & \dots & P_{11} \dots P_{1, n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{p, 1} \dots 1_{p, n_1+1} & 2_{p, 1} \dots 2_{p, n_2+1} & \dots & \dots & P_{p, 1} \dots P_{p, n_p+1} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(p-1)n_1 + (p-2)n_2 + \dots + n_{p-1}} \quad (2)$$

<sup>1</sup> *L'Enseignement mathém.*, t. 24, 1924-25.

<sup>2</sup> Ici nous ne prenons pas les relations du type

$$\begin{vmatrix} \left| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} e_1 & f_1 \\ g_1 & h_1 \end{matrix} \right| \\ \left| \begin{matrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} e_2 & f_2 \\ g_2 & h_2 \end{matrix} \right| \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 d_1 & b_1 c_1 & e_1 h_1 & f_1 g_1 \\ a_2 d_2 & b_2 c_2 & e_2 h_2 & f_2 g_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

parce qu'elles ne sont qu'un cas particulier du type (1).

d'après les mineurs, constitués des colonnes renfermées entre deux traces verticales voisines, nous trouverons :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 1_{11} & \dots & 1_{1,n_1+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} & \dots & 1_{n_1, n_1+1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2_{11} & \dots & 2_{1, n_2+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2_{n_2 1} & \dots & 2_{n_2, n_2+1} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1, n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n_p 1} & \dots & p_{n_p, n_p+1} \end{vmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{vmatrix} 1_{11} & \dots & 1_{1, n_1+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1_{n_1 1} & \dots & 1_{n_1, n_1+1} \\ 1_{p 1} & \dots & 1_{p, n_1+1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2_{11} & \dots & 2_{1, n_2+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 2_{n_2 1} & \dots & 2_{n_2, n_2+1} \\ 2_{p 1} & \dots & 2_{p, n_2+1} \end{vmatrix} & \dots & \begin{vmatrix} p_{11} & \dots & p_{1, n_p+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n_p 1} & \dots & p_{n_p, n_p+1} \\ p_{p 1} & \dots & p_{p, n_p+1} \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad (3)$$

D'autre part, la décomposition du déterminant  $\Delta$  d'après les mineurs, constitués des lignes renfermées entre chaque deux traces horizontales voisines, donne

$$\Delta = \sum (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p+p(1+n_1+\dots+n_p)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(2)} \dots x_{i_p}^{(p)} \cdot X_{i_1 i_2 \dots i_p} \quad (4)$$

où

$$x_{i_\beta}^{(\alpha)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1, i_\beta-1} & \alpha_{1, i_\beta+1} & \dots & \alpha_{1, n_\beta+1} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2, i_\beta-1} & \alpha_{2, i_\beta+1} & \dots & \alpha_{2, n_\beta+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_\beta 1} & \dots & \alpha_{n_\beta, i_\beta-1} & \alpha_{n_\beta, i_\beta+1} & \dots & \alpha_{n_\beta, n_\beta+1} \end{vmatrix} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

$$X_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} 1_{1 i_1} & 1_{2 i_2} & \dots & 1_{1 i_p} \\ 1_{2 i_1} & 1_{2 i_2} & \dots & 1_{2 i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1_{p i_1} & 1_{p i_2} & \dots & 1_{p i_p} \end{vmatrix} \quad (i_\gamma = 1, 2, \dots, n_\gamma).$$

L'égalité des expressions (3) et (4) est une généralisation du théorème connu de Sylvester; car, si nous faisons :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_p = n,$$

$$l_{hi} = m_{hi} = x_{hi}; \quad 1_{ji} = m_{ji} = x_{n+j, i};$$

$$l_{h, n+1} = x_{h, n+l}, \quad k_{j, n+1} = x_{n+j, n+k}.$$

( $h, i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j, k, l, m = 1, 2, \dots, p$ ;  $k, l, m = 1, 2, \dots, p$ ),

cette égalité prendra la forme:

$$\begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+2} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+2} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+2} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+2} \end{array} \right|, \dots, \left| \begin{array}{cccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+p} \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \\
 \\
 = \left| \begin{array}{cccccc} x_{11} & \dots & x_{1n} & x_{1,n+1} & \dots & x_{1,n+p} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} & x_{2,n+1} & \dots & x_{2,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} & x_{n,n+1} & \dots & x_{n,n+p} \\ x_{n+1,1} & \dots & x_{n+1,n} & x_{n+1,n+1} & \dots & x_{n+1,n+p} \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n+p,1} & \dots & x_{n+p,n} & x_{n+p,n+1} & \dots & x_{n+p,n+p} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{array} \right|^{p-1}
 \end{array}$$

## NOTE SUR LA DISTRIBUTION DES RACINES DES POLYNOMES DÉRIVÉS

PAR

M. KRAWTCHOUK (Kieff).

THÉORÈME I. Soient  $B$  et  $\Gamma$  deux cercles, l'un à l'intérieur de l'autre, sur le plan de la variable complexe  $\zeta$ ; soit de plus  $n$  le rapport de similitude de ces cercles,  $\alpha$  leurs centres de similitude et