DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA LOI DE GAUSS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

Autor(en): **Lomnicki, Antoine**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **15.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20678

par les formules de Newton exactement comme si le sinus était un polynome.

23. Une conclusion à tirer du précédent article est la suivante: *la théorie des fonctions entières et méromorphes n'est en somme pas autre chose que la théorie quantitative des polynomes et des fractions rationnelles, abstraction faite de leur degré.* Ce point de vue n'a évidemment qu'un lointain rapport avec d'autres, comme celui d'après lequel « les comparaisons et le langage de la biologie » seraient « très utiles en théorie des fonctions »[1]. Mais si le point de vue actuel comporte plus que celui-là des difficultés ardues et périlleuses et exige assurément plus d'efforts, il n'est pas douteux par contre qu'il conduira en définitive à de tout autres résultats.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE
DE LA
LOI DE GAUSS DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS

PAR

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

---

1. La loi de GAUSS, que quelques auteurs appellent aussi le théorême de BERNOULLI-LAPLACE, s'exprime par la relation arithmétique suivante:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,!}{(\mathrm{E}(np)-s)\,!\;(n-\mathrm{E}(np)+s)\,!} p^{\mathrm{E}(np)-s}\, q^{n-\mathrm{E}(np)+s} \sqrt{4pqn}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2}\,, \tag{1}$$

où $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $s = \mathrm{E}(\lambda\sqrt{2pqn})$, λ étant un nombre constant, choisi à volonté. $\mathrm{E}(x)$ désigne le plus grand entier

[1] E. BOREL, *Méthodes et problèmes de théorie des fonctions.* 1922.

contenu dans x. Le symbole $(\mathrm{E}(np)-s)!$ n'a de sens que pour n suffisamment grand, savoir pour $\mathrm{E}(np)>s$. Si np parcourt seulement les valeurs entières, la formule (1) prend une forme plus simple:

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{np-s}p^{np-s}q^{nq+s}\sqrt{4pqn}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\lambda^2}\,, \tag{2}$$

Comme dans cette formule figurent le nombre π et la fonction exponentielle, il faudra dans la démonstration faire usage d'une définition arithmétique du nombre π et d'une définition de e^x. Nous adopterons la définition de π par la formule de WALLIS, laquelle se montre ici la plus naturelle et la plus convenable et nous définirons e^x par $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Nous ne ferons pas usage de la formule de STIRLING, au contraire, elle découlera presque immédiatement de nos raisonnements. Voilà pourquoi nous appelons notre démonstration « démonstration élémentaire ».

La formule classique de WALLIS s'écrit:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2.2.4.4\ldots(2m-2)2m}{1.3.3.5\ldots(2m-1)(2m-1)}=\frac{\pi}{2}\,.$$

On la transforme sans peine en

$$\lim_{m\to\infty}W_{2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2m\,!}{m\,!^2}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \tag{3}$$

Appelons $A_n(s)$ le terme général de la suite, qui figure dans la formule (1) ou (2).

2. La démonstration de la loi de GAUSS devient très simple dans le cas *symétrique* $p=q=\frac{1}{2}$. La suite considérée devient

$$A_n(s)=\frac{n\,!}{\left(\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)-s\right)!\left(n-\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right)+s\right)!}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n}\,. \tag{4}$$

Il suffit de chercher la limite de cette suite pour $n=2\,m$, car

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_{2m+1}(s)}{A_{2m}(s)}=1\,,$$

comme il est aisé de voir. Nous avons donc

$$\mathrm{A}_n(s) = \mathrm{A}_{2m}(s) = \frac{2m!}{(m-s)!\,(m+s)!}\,\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}}. \tag{5}$$

Pour $s = 0$ on a

$$\mathrm{A}_n(0) = \frac{2m!}{m!^2}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}} = \mathrm{W}_{2m},$$

donc

$$\underline{\lim_{n\to\infty} \mathrm{A}_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}}. \tag{6}$$

Pour $s \neq 0$ nous séparons le terme qui tend vers $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, alors

$$\mathrm{A}_n(s) = \mathrm{A}_n(0)\,.\,\mathrm{B}_n(s)$$

$$= \frac{2m!\,\sqrt{2m}}{m!^2\,2^{2m}}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-s+2)(m-s+1)}{(m+s)(m+s-1)(m+s-2)\ldots(m+2)(m+1)}. \tag{7}$$

Pour déterminer la limite de $\mathrm{B}_n(s)$, considérons

$$\frac{1}{\mathrm{B}_n(s)} = \frac{1}{\mathrm{B}_{2m}(s)}$$

$$= \left(1+\frac{s}{m}\right)\left(1+\frac{s}{m-1}\right)\ldots\left(1+\frac{s}{m-s+2}\right)\left(1+\frac{s}{m-s+1}\right).$$

Ce produit contient s facteurs, qui vont en croissant, donc

$$\left(1+\frac{s}{m}\right)^s < \frac{1}{\mathrm{B}_{2m}(s)} < \left(1+\frac{s}{m-s+1}\right)^s. \tag{8}$$

Pour $s = \text{const.}$ nous aurions $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{B}_n(s) = 1$, mais pour $s = \mathrm{E}(\lambda\sqrt{2pqn})$, c'est-à-dire pour

$$s = \mathrm{E}\left(\lambda\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \mathrm{E}(\lambda\sqrt{m}),$$

nous obtiendrons une limite qui dépend du λ. Supposons d'abord $\lambda\sqrt{m}$ entier. Dans ce cas

$$\left(1+\frac{s}{m}\right)^s = \left(1+\frac{\lambda\sqrt{m}}{m}\right)^{\lambda\sqrt{m}} = \left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{m}}\right)^{\sqrt{m}\,.\,\lambda},$$

alors

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{s}{m}\right)^s = e^{\lambda^2}.$$

De même

$$\left(1 + \frac{s}{m - s + 1}\right)^s = \left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{m} - \lambda + \frac{1}{\sqrt{m}}}\right)^{\lambda\sqrt{m}}$$

tend vers e^{λ^2}.

Les inégalités (8) fournissent alors

$$\underline{\lim_{n \to \infty} B_n(s) = e^{-\lambda^2}} . \tag{9}$$

Les formules (6), (7) et (9) donnent

$$\underline{\lim_{n \to \infty} A_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2}} . \tag{10}$$

Si $\lambda\sqrt{m}$ n'est pas un entier, il faut refaire le même raisonnement sur $s = \lambda\sqrt{m} - \alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Comme $\frac{\alpha}{\sqrt{m}}$ tend vers zéro, on constate qu'on obtient la même limite e^{λ^2} et la même formule (10). La loi de Gauss est donc démontrée dans le cas symétrique.

3. Passons au cas asymétrique, c'est-à-dire posons $p \neq q$, par exemple $p > q$. Supposons d'abord np et $\lambda\sqrt{2pqn}$ entiers et décomposons $A_n(s)$ en deux facteurs, comme dans le cas symétrique

$$A_n(s) = \frac{n!}{np!\; nq!} p^{np} q^{nq} \sqrt{4pqn}\, .$$

$$\cdot \frac{np \cdot (np - 1) \ldots (np - s + 2)(np - s + 1)}{(nq + s)(nq + s - 1) \ldots (nq + 2)(nq + 1)} \cdot \frac{q^s}{p^s} . \tag{11}$$

Soient

$$A_n(0) = \frac{n!}{np!\; nq!} p^{np} q^{nq} \sqrt{4pqn} \tag{12}$$

et $B_n(s)$ le produit restant, alors

$$A_n(s) = A_n(0) \cdot B_n(s) . \tag{13}$$

Considérons en premier lieu la limite de $B_n(s)$.

$$B_n(s) = \frac{npq}{npq + sp} \cdot \frac{npq - q}{npq + sp - p} \cdot \ldots$$

$$\cdot \frac{npq - sq + 2q}{npq + 2p} \cdot \frac{npq - sq + q}{npq + p} ,$$

d'où

$$\frac{1}{B_n(s)} = \left(1 + \frac{sp}{npq}\right)\left(1 + \frac{sp - (p-q)}{npq - q}\right) \cdots$$

$$\left(1 + \frac{sq + 2(p-q)}{npq - sq + 2q}\right)\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right). \qquad (14)$$

Les limites de $\left(1 + \frac{sp}{npq}\right)^s$ et $\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right)^s$ sont ici $e^{2p\lambda^2}$ et $e^{2q\lambda^2}$; elles sont alors trop larges. On parvient cependant aux suites limitantes convenables pour $\frac{1}{B_n(s)}$ en groupant les facteurs de (14) deux à deux, le premier avec le dernier, etc. On prouve aisément (par exemple dans la formule (11)) que ces couples de facteurs vont en croissant pour n suffisamment grand, p étant plus grand que q, donc

$$\left(1 + \frac{sp}{npq}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{sq + (p-q)}{npq - sq + q}\right)^{s/2} < \frac{1}{B_n(s)}$$

$$< \left(1 + \frac{s + 2(p-q)}{2npq - sq + 2q}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{s}{2npq - sq}\right)^{s/2},$$

si s est un nombre pair, et d'une manière analogue pour s impair. Pour $s = \lambda\sqrt{2pqn}$ les suites limitantes tendent vers les mêmes limites que les suites

$$\left(1 + \frac{s}{nq}\right)^{s/2}\left(1 + \frac{s}{np}\right)^{s/2} \qquad \text{et} \qquad \left(1 + \frac{s}{2npq}\right)^{s/2}\cdot\left(1 + \frac{s}{2npq}\right)^{s/2}$$

qui sont moins compliquées. En introduisant $s = \lambda\sqrt{2pqn}$ on voit, que la suite limitante inférieurement tend vers $e^{p\lambda^2}.e^{q\lambda^2} = e^{\lambda^2}$ et la suite limitante supérieurement vers

$$e^{\frac{1}{2}\lambda^2}\,.\,e^{\frac{1}{2}\lambda^2} = e^{\lambda^2}.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} B_n(s) = e^{-\lambda^2}. \qquad (15)$$

On voit ici clairement pourquoi on a adopté pour s la forme

$$\lambda\sqrt{2pqn}.$$

4. Il reste à prouver que la limite de la suite $A_n(0)$ dans (12) est $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Posons $\mathbf{n = 2m}$, ce qui est sans influence sur la valeur de la limite — comme dans le cas symétrique. Il vient

$$A_n(0) = A_{2m}(0) = \frac{2m\,!}{2mp\,!\;2mq\,!}\, p^{2mp}\, q^{2mq} \sqrt{4pq\,.\,2m}\,. \tag{16}$$

Cette suite est une généralisation de la suite (3) de WALLIS et pour $p = q = \frac{1}{2}$ elle est identique à (3). Mettons en évidence la suite W_{2m} de WALLIS. Il vient

$$A_{2m}(0) = W_{2m} \cdot C_{2m} = \frac{2m\,!}{m\,!^2}\,\frac{\sqrt{2m}}{2^{2m}} \cdot \frac{m\,!^2}{2mp\,!\;2mq\,!}\,(2p)^{2mp}\,(2q)^{2mq}\sqrt{4pq}\,. \tag{17}$$

En simplifiant la fraction, on ramène C_{2m} à la forme

$$C_{2m} = \frac{(2mq+1)\,(2mq+2)\,\ldots\,(m-1)\,m}{2mp\,(2mp-1)\,\ldots\,(m+2)\,(m+1)} \cdot (2p)^{2mp+\frac{1}{2}}\,(2q)^{2mq+\frac{1}{2}}\,,$$

ou

$$C_{2m} = \frac{(2mq+1)\,(2mq+2)\,\ldots\,(m-2)\,(m-1)}{(2mp-1)\,(2mp-2)\,\ldots\,(m+2)\,(m+1)}\,(2p)^{2mp-\frac{1}{2}}\,(2q)^{2mq+\frac{1}{2}}\,.$$

Nous réunissons et complétons les facteurs correspondants pour obtenir les suites de la forme exponentielle. Par exemple, on transforme $\frac{(2p)^{2mp-\frac{1}{2}}}{2mp-1}$ en $\left(\frac{2mp}{2mp-1}\right)^{2mp-\frac{1}{2}}$ en multipliant et en divisant par $\frac{m^{2mp-\frac{1}{2}}}{(2mp-1)^{2mp-\frac{3}{2}}}$. Ensuite on transforme $\frac{(2mp-1)^{2mp-\frac{3}{2}}}{2mp-2}$ en $\left(\frac{2mp-1}{2mp-2}\right)^{2mp-\frac{3}{2}}$ et ainsi de suite. On parvient de cette manière à l'expression suivante

$$C_{2m} = \frac{\left(1+\frac{1}{2mp-1}\right)^{2mp-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2mp-2}\right)^{2mp-\frac{3}{2}} \cdots \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+\frac{3}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2mq}\right)^{2mq+\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{2mq+1}\right)^{2mq+\frac{3}{2}} \cdots \left(1+\frac{1}{m-2}\right)^{m-\frac{3}{2}} \cdot \left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-\frac{1}{2}}} \tag{18}$$

On peut enfermer les termes de cette suite entre deux suites, qui tendent vers la même limite 1. Il y a $\mathbf{2mp - m = m - 2mq}$

facteurs dans le numérateur et dans le dénominateur. Nous appliquons à chaque facteur les inégalités connues

$$e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)} \tag{19}$$

qu'on obtient aisément du développement de $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

Prenons d'abord pour les facteurs du numérateur les nombres e, qui sont plus petits et dans le dénominateur les nombres $e^{1+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)}$, qui sont plus grands et ensuite inversement. Nous trouvons

$$\frac{e^{2mp-m}}{e^{2mp-m+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2mq}-\frac{1}{2mq+1}+\frac{1}{2mq+1}\cdots-\frac{1}{m}\right)}} < C_{2m}$$

$$< \frac{e^{2mp-m+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}\cdots-\frac{1}{2mp}\right)}}{e^{2mp-m}}$$

ou

$$e^{-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2mq}-\frac{1}{m}\right)} < C_{2m} < e^{+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2mp}\right)} .$$

Les suites limitantes tendent ici vers 1, donc

$$\lim_{m\to\infty} C_{2m} = 1 . \tag{20}$$

La formule (17) devient alors

$$\lim_{n\to\infty} A_n(0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} . \tag{21}$$

Les formules (13), (15) et (21) donnent

$$\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} A_n(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\lambda^2}}} .$$

La loi de Gauss est donc démontrée aussi dans le cas asymétrique.

Nous avons supposé np et $\lambda\sqrt{2pqn}$ entiers. S'il n'en est pas ainsi, il faut introduire dans les raisonnements $E(np) = np - \alpha$ et

$$E(\lambda\sqrt{2pqn}) = \lambda\sqrt{2pqn} - \beta \quad \text{où} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \beta < 1$$

et compléter toute la discussion. On constate qu'on obtient les mêmes limites pour $B_n(s)$, C_{2m}, $A_n(0)$ et $A_n(s)$. Nous ne ferons pas ici cette discussion minutieuse qui n'est ni difficile ni intéressante.

5. *Remarques.* — 1° Les formules (21) et (16) fournissent une généralisation intéressante de la formule de WALLIS. Si np n'est pas un entier, nous pouvons écrire cette formule généralisée de la manière suivante

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{E(np)!\;(n-E(np))!}\, p^{E(np)} q^{n-E(np)} \sqrt{4pqn} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,. \tag{22}$$

2° Par des raisonnements tout à fait analogues à la démonstration de la formule (20) on peut démontrer la formule de STIRLING. D'abord la formule (3) de WALLIS fournit en divisant par $m!$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{W_{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{m!\;2^{2m}}{(2m-1)(2m-2)\dots(m+2)(m+1)\,2m\sqrt{2m}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ou

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m!\;2^{2m-\frac{1}{2}}}{2(2m-1)(2m-2)\dots(m+2)(m+1)\,m^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

En procédant ici de la même manière que pour C_{2m} on trouve l'identité

$$\frac{1}{W_{2m}} = \frac{m!}{2m^{m+\frac{1}{2}}}\left(1+\frac{1}{2m-1}\right)^{2m-\frac{1}{2}}\cdot\left(1+\frac{1}{2m-2}\right)^{2m-\frac{3}{2}}\dots\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}.$$

Les inégalités (19) donnent ici

$$\frac{m!\;e^m}{2m^{m+\frac{1}{2}}} < \frac{1}{W_{2m}} < \frac{m!\;e^{m+\frac{1}{24m}}}{2m^{m+\frac{1}{2}}}$$

donc

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{W_{2m}} : \frac{m!\;e^m}{2m^{m+\frac{1}{2}}}\right) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{m\to\infty} \frac{m!}{m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m}} = 1\,. \tag{23}$$

La formule de STIRLING est démontrée.

Pour parvenir à la formule

$$m! = \sqrt{2\pi m}\; m^m e^{-m+\frac{\theta}{12m}} \tag{24}$$

il suffit de former le quotient de deux termes consécutifs de la suite s_m qui figure dans (23)

$$\frac{s_m}{s_{m+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}}}{e}$$

et appliquer encore une fois les inégalités (19) (*v.* E. Cesàro, *Elementares Handbuch der algebraischen Analysis.* Leipzig. 1904; p. 154–155).

Lwów, Pologne, mars 1926.

LES ÉPREUVES RÉPÉTÉES ET LA MÉTHODE DES FRACTIONS CONTINUES DE MARKOFF

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

Considérons une suite de s épreuves comportant deux événements contradictoires A et B de probabilités constantes p et q (conditions de Bernoulli) et soit P la probabilité pour que le nombre de réalisations m de l'événement A soit compris au sens large entre deux nombres donnés m_1, m_2. On sait que P est égale à la somme

$$\sum_{m=m_1}^{m_2} C_s^m p^m q^{s-m} .$$

Envisageons le binome

$$\begin{aligned}(q+p)^s = q^s + C'_s p q^{s-1} + \dots \\ + C_s^{m_1} p^{m_1} q^{s-m_1} + \dots + C_s^{m_2} p^{m_2} q^{s-m_2} \\ + C_s^{m_2+1} p^{m_2+1} q^{s-m_2-1} + \dots + p^s .\end{aligned} \tag{1}$$