Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les bitangentes d'une quartique.

A propos des articles de MM. WINANTS et DELENS.

Dans son article *Fonctions elliptiques et quartiques binodales* de *l'Ens. Math.* (tome XXIII, 3, 4, p. 148-163) M. WINANTS a rencontré une difficulté d'élimination en cherchant les bitangentes de la quartique $x = \wp' u$, $y = \wp'' u$. M. DELENS a donné la solution de cette difficulté dans le tome XXIII, 5, 6, p. 327-328 de l'*Ens. Math.* Je veux montrer comment on peut trouver les bitangentes, sans cette difficulté.

Hors de la droite à l'infini les bitangentes joignent des paires de points donnés par les affixes u, v, où $u + v \equiv 0$, ou $\frac{\omega}{2}$ ou $\frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega''}{2}$, ω et ω' étant les périodes et $\omega'' = \omega + \omega'$. Si $Ax + By + C = 0$ est une bitangente, la fonction

$$A\wp' u + B\wp'' u + C = A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2\right) + C$$

possède deux paires de zéros doubles. Donc, pour $u + v \equiv 0$, on a les conditions nécessaires et suffisantes $u \not\equiv v$ et

$$\begin{aligned} A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2\right) + C &= 0 , \\ -A\wp' u + B\left(6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2\right) + C &= 0 , \\ A\wp'' u + 12B\wp u \wp' u &= 0 . \end{aligned}$$

Seule solution : $\wp u = 0$, et nous trouvons *une bitangente* joignant les deux points où $\wp u = 0$.

Pour $u + v \equiv \frac{\omega}{2}$, on a les conditions nécessaires et suffisantes $u \not\equiv v$ et

$$\begin{aligned} A\wp' u + B\left\{6\wp^2 u - \frac{1}{2} g_2\right\} + C &= 0 , \\ A\wp'\left(\frac{\omega}{2} - u\right) + B\left\{6\wp^2\left(\frac{\omega}{2} - u\right) - \frac{1}{2} g_2\right\} + C &= 0 , \\ A\wp'' u + 12B\wp u \wp' u &= 0 , \end{aligned}$$

donc

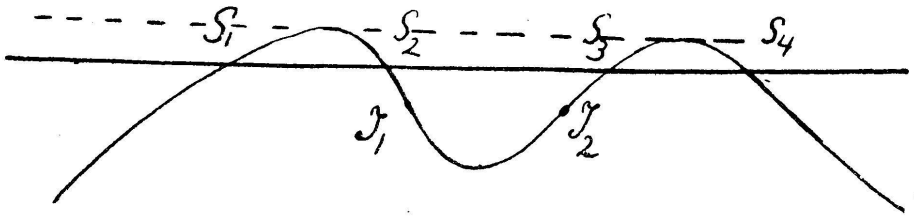
$$\psi(u) = 2\mathfrak{p}u\,\mathfrak{p}'u\left\{\mathfrak{p}'u - \mathfrak{p}'\left(\frac{\omega}{2} - u\right)\right\} - \mathfrak{p}''u\left\{\mathfrak{p}^2u - \mathfrak{p}^2\left(\frac{\omega}{2} - u\right)\right\} = 0 \ ;$$

$\psi(u)$ a le point $u = 0$ pour pôle d'ordre 8, le point $u = \frac{\omega}{2}$ pour pôle d'ordre 4, donc $\psi(u)$ a 12 zéros. Les zéros $\frac{\omega}{4}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega}{4} + \frac{\omega''}{2}$ sont doubles et satisfont à $u \equiv \frac{\omega}{2} - u$. Restent 4 zéros, et nous trouvons *deux bitangentes* joignant les deux paires de points correspondants. D'une manière analogue pour $u + v \equiv \frac{\omega'}{2}$ ou $\frac{\omega''}{2}$, donc hors de la droite à l'infini la courbe a 7 bitangentes.

Que la droite à l'infini, qui coupe la courbe en 4 points coïncidant avec le point à l'infini de $x = 0$ doive compter pour une seule bitangente, devient clair si nous cherchons les points d'inflexion. Hors du point à l'infini ces points correspondent aux solutions de

$$\mathfrak{p}^{\mathrm{II}}u + \mathfrak{p}^{\mathrm{IV}}u - (\mathfrak{p}^{\mathrm{III}}u)^2 = 0 \ ,$$

donc il y en a 10. Par suite le point à l'infini compte pour 2 points d'inflexion dans le sens de Plücker. La figure ci-dessous peut illustrer un peu la chose.



Si les points S_i se réunissent, les deux points d'inflexion se réunissent dans le même point.

J. Wolff (Utrecht).

Trajectoires orthogonales et ombilics.

Je voudrais, sans toucher au fond même du problème, ajouter quelques remarques aux intéressantes considérations présentées par M. Marcel Winants dans un récent article (Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? *L'Enseignement mathématique*, 24me année, p. 239, 1925).

I. Les différentes configurations de trajectoires orthogonales indiquées au premier paragraphe de cet article appartiennent à une

même classe, ces configurations étant toutes isothermes, et pouvant se déduire de l'une d'elles par des transformations conformes. Aussi leurs singularités sont-elles dues, d'une part, à la configuration initiale, d'autre part, aux transformations conformes particulières employées.

Partons d'un système d'axes rectangulaires ox, oy et utilisons la variable complexe $z = x + iy$; représentons une transformation conforme par $Z = f(z)$, la fonction f étant analytique. On passe ainsi de la configuration $\alpha)$ aux configurations $\beta)$, puis $\gamma)$, et de $\beta)$ à $\delta)$ par les transformations:

$$Z = e^z , \qquad Z = a + \frac{4a^2}{z - a} , \qquad Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{c^2}{z}\right) .$$

Or la configuration initiale $\alpha)$ présentait un point singulier au point à l'infini du plan complexe (on ne peut guère s'abstenir de considérer cet élément); les singularités des fonctions de transformation sont bien connues et l'on peut suivre les transformations des singularités sur les configurations successives. Il est alors facile de construire des configurations de trajectoires orthogonales présentant certaines singularités; ainsi la transformation:

$$Z = z^{\frac{1}{3}}$$

transformerait la configuration $\alpha)$ en celle des courbes:

$$x(x^2 - 3y^2) = \text{const.} \qquad y(3x^2 - y^2) = \text{const.} \qquad (\varepsilon)$$

faciles à construire, et présentant toutes une symétrie ternaire autour de l'origine, point de ramification où se croisent six droites, trois d'entre elles appartenant à la première famille de courbes, dont elles sont les asymptotes, les trois autres jouant le même rôle pour la seconde famille. Le point à l'infini est également point singulier d'une autre espèce. On verrait aisément comment les transformations énoncées précédemment, ou leurs inverses, modifieraient cette configuration.

II. Il semble que pour l'étude des lignes de courbure d'une surface en un ombilic, on puisse se proposer la marche suivante: utiliser une représentation conforme de la surface qui transforme leur système en une configuration de trajectoires orthogonales du plan, les surfaces isothermiques (à lignes de courbure isothermes) donnant en particulier une configuration isotherme. Tenter ensuite de reconnaître à quelle classe appartient le système obtenu, vis-à-vis des transformations conformes; je ne sais d'ailleurs pas si une telle classification des familles de courbes, ou des équations différentielles du premier ordre, a déjà été obtenue (les familles isothermes donnent en coordonnées symétriques une équation où les variables se séparent). On pour-

rait alors, par une transformation conforme, ramener le réseau orthogonal à une forme type simple: la connaissance des singularités de cette forme, et de celles des transformations employées, montrerait ainsi la nature des singularités aux ombilics.

Signalons en particulier, pour les quadriques, surfaces isothermiques, la représentation conforme obtenue par la déformation d'Ivory, où la surface s'aplatit sur le plan en restant homofocale à elle-même.

Le Hâvre, le 9 mars 1926.

P.-C. DELENS.

A propos d'un article de M. Winants sur le nombre de lignes de courbure passant par un ombilic.

1. — *Lettre de M. Emile Picard*, Membre de l'Institut.

Cher Monsieur Fehr,

Dans son numéro paru en janvier 1926 (Tome 24, p. 239), l'*Enseignement mathématique* contient un article de M. Winants, intitulé: « Combien passe-t-il de lignes de courbure par un ombilic ? ». L'auteur dit que cette question n'a été qu'effleurée dans mon *Traité d'Analyse*. Je ne puis partager cette opinion. On trouve dans le Tome III de mon Traité (2me édition, 1908, page 223, une section ayant pour titre: « *Equations du premier ordre et de degré supérieur. Application à la recherche des lignes de courbure passant par un ombilic* », qui avait d'ailleurs été antérieurement résumée dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences (11 mars 1895). J'y fais la discussion pour le cas général des points singuliers d'une équation du premier ordre et du second degré, et j'applique les résultats trouvés au problème des lignes de courbure passant par un ombilic. Je montre que, *suivant les cas, il y a une seule ligne de courbure ou une infinité de lignes de courbure passant par un ombilic et ayant pour tangente une des directions données par une certaine équation du troisième degré.* Appliquée aux quadriques, cette étude montre que, pour ces surfaces, il ne passe par un ombilic qu'une seule ligne de courbure, résultat d'ailleurs bien connu.

Je vous serais obligé de bien vouloir insérer cette lettre dans l'*Enseignement mathématique*, et je vous prie de croire, cher Monsieur, à mes sentiments cordialement dévoués.

Paris, le 22 mars 1926.

Emile PICARD.

2. — *Un mémoire publié en* 1890 *par M. Ch. Bioche* (Paris).

Il y a lieu de signaler ici la Note publiée en 1890 par M. Ch. BIOCHE, sous le titre « Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic » (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, tome 18, p. 95 à 106). Nous en reproduisons ci-après l'introduction:

« Voici, en résumé, les considérations qui font l'objet du mémoire suivant:

« Je discute les questions théoriques d'où l'on peut déduire l'équation des lignes de courbure pour un ombilic.

« Après avoir établi des résultats connus, relatifs à la distribution des lignes de courbure qui passent par un ombilic, lorsque l'équation qui détermine leur direction est du troisième degré, je discute un raisonnement erroné de Dupin.

« Je fais remarquer que, contrairement à une assertion de M. Amiot, il passe toujours au moins deux lignes de courbure réelle par tout ombilic pour lequel l'équation est de degré pair. Je montre que, si, par un point où toutes les courbures normales sont nulles, il passe trois lignes asymptotiques, les directions de ces lignes alternent avec celles des lignes de courbure.

« Enfin, je donne la liste des travaux que j'ai pu retrouver et où il est question des lignes de courbure qui passent par un ombilic. »

3. — *Notes bibliographiques.*

Pour compléter la liste établie en 1890 par M. Bioche, il convient de signaler en première ligne l'étude générale publiée par M. Emile PICARD dans son *Traité d'Analyse* (T. III) et la Note de G. DARBOUX, dans sa *Théorie générale des Surfaces* (T. IV, p. 448 et suiv.).

Voir aussi le Traité de Géométrie infinitésimale de M. A. R. FORSYTH, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ch. IV, 1912.

Plusieurs auteurs se sont encore occupés de la question dans des Mémoires spéciaux. Sans avoir la prétention d'être complets, nous citerons les travaux suivants:

WAHLGREN, Sur la forme d'une ligne de courbure dans le voisinage d'un ombilic, *Arkiv för Mat. astr. och fys.*, T. I, 1903, page 43-63, Stockholm.

GULLSTRUND, Zur Kenntnis der Kreispunkte, *Acta Mat.* XXVIII, 1904, p. 59-100.

KORTEWEG et DE LANGE, Over twee en meervoudige ombilikaalpunte. *Académie des Sc.*, Amsterdam, 1904, 13, 388-398.

P. HUMBERT, Sur les ombilics de la surface piriforme, C. R. 1917, CLXV, p. 357-358.

D. DE LANGE, Eenige beschouwingen over enkel- en meervoudige ombilikaalpunten... (Considération sur les ombilics et les lignes de courbure dans leur voisinage). Thèse de doctorat, Delft, 1904, 82 p.

H. F.

Ombilics et lignes de courbure.

M. Fehr m'ayant aimablement signalé la remarque de M. Picard, je me propose d'ajouter quelques indications à l'exposé de M. Picard et à ma note précédente; dans celle-ci, j'avais suivi le plan de l'article de M. Winants et suggéré de rattacher le problème des lignes de courbure aux ombilics à la géométrie conforme; mais les lignes de courbure sont naturellement autre chose que des trajectoires orthogonales ordinaires et on peut aussi les étudier sur une surface donnée sans mettre en jeu les représentations conformes de celle-ci.

Peut-être sera-t-il intéressant à ce sujet de présenter quelques remarques géométriques à côté de la délicate analyse de M. Picard, qui n'a d'ailleurs étudié que le cas *général*, ce qui n'épuise pas le sujet. Interprétons pour cela l'équation du troisième degré qu'utilise M. Picard.

Soient, pour une ligne tracée sur une surface, ds l'élément d'arc, k_g la courbure géodésique, R et T les rayons de courbure normale et de torsion géodésique en un point, H la courbure moyenne de la surface. Il existe, en tout point d'une surface, des éléments géométriques communs aux lignes tracées sur la surface et tangentes en ce point, mis en évidence par Laguerre, puis Darboux; les fonctions de Laguerre et Darboux sont suivies d'autres fonctions plus compliquées qu'on construit facilement de proche en proche; les lignes de la surface, pour lesquelles une de ces fonctions s'annule, sont données par des équations différentielles de degrés successifs 2, 3, .. p, ... de sorte qu'en un point de la surface passent en général 2, 3, ... p, ... telles lignes. Posons:

$$\frac{1}{R} = \Lambda_2' , \qquad \frac{1}{T} = \Delta_2 ,$$

$$\frac{d\frac{1}{R}}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3' , \qquad \frac{d\frac{1}{T}}{ds} + 2k_g\left(\frac{1}{R} - H\right) = \Delta_3 ,$$

Λ_3' et Δ_3 sont les fonctions de Laguerre et de Darboux attachées à une direction; on obtient des chaînes de fonctions plus simples en substituant à Λ_2' et Λ_3':

$$\frac{1}{R} - H = \Lambda_2 \qquad \frac{d\left(\frac{1}{R} - H\right)}{ds} - 2\frac{k_g}{T} = \Lambda_3$$

et l'on a alors la loi de formation générale:

$$\frac{d\Lambda_p}{ds} - p\,k_g\Delta_p = \Lambda_{p+1}\ , \qquad \frac{d\Delta_p}{ds} + p\,k_g\Lambda_p = \Delta_{p+1}\ .$$

Les formes différentielles correspondantes s'obtiennent par différentiation covariante, suivant une méthode indiquée par M. Cartan [1].

Pour les lignes de courbure:

$$\Delta_2 \equiv 0\ .$$

En un ombilic

$$\Lambda_2 = 0\ .$$

Les lignes de courbure satisfont donc aux ombilics à l'équation:

$$\Delta_3 = 0$$

du troisième degré pour les coefficients angulaires de leurs tangentes. C'est là le cas général; nous pensons d'ailleurs que les formules précédentes permettent une discussion complète du problème. Contentons-nous d'ajouter que pour les lignes de courbure qui sont géodésiques (et alors planes), $k_g \equiv 0$, les fonctions Δ successives s'annulent tout le long de la ligne.

Le Hâvre, le 29 avril 1926.

P.-C. DELENS.

CHRONIQUE

Congrès international de Mécanique appliquée.

Zurich, septembre 1926.

En avril 1924 un groupe de savants hollandais prit l'initiative de réunir à Delft un Congrès international de Mécanique appliquée [2]. Le succès de cette réunion décida les organisateurs à instituer des congrès périodiques. Le Comité international désigné à cet effet a décidé de réunir le deuxième Congrès international de Mécanique appliquée à Zurich. Celui-ci se tiendra sous les auspices de l'Ecole polytechnique fédérale, du 12 au 18 septembre 1926. Son organisation

---

[1] E. CARTAN. Sur les formes différentielles en Géométrie. *C. R. de l'Ac. des Sc.*, 7 janvier 1924.

[2] Voir compte rendu dans l'*Ens. math.*, T. 24, p. 139.