Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: S. Bernstein. — Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle, professées à la Sorbonne. — Un volume gr. in-8° de x-208 pages. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris. 1926.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

un dernier chapitres provenant d'un cours de M. E. Borel, rédigé par M. H. Mineur. Le premier chapitre a trait aux propriétés essentielles des formes linéaires et quadratiques ; le dernier traite de la géométrie de Cayley.

Il s'agit alors de formes quadratiques au sens algébrique de cette expression ; les *absolus* sont des coniques, des quadriques..., tandis que les théories riemanniennes et einsteiniennes du corps de l'ouvrage exigent l'étude de formes *différentielles* quadratiques, notamment de ds^2. Mais il s'agit évidemment, dans les deux cas, de généralisations des concepts géométriques élémentaires ; les deux choses sont à rapprocher le plus possible. Félicitons-nous, encore une fois, de les voir passer dans l'enseignement officiel, à l'abri de noms dont l'autorité n'est contestée par personne.

A. Buhl (Toulouse).

S. Bernstein. — **Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des Fonctions analytiques d'une variable réelle,** professées à la Sorbonne. — Un volume gr. in-8° de x-208 pages. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris. 1926.

Pour bien situer cet ouvrage, il conviendrait peut-être de rappeler un théorème de Weierstrass sur la représentation approchée, par fonctions entières, de fonctions, analytiques ou non, pouvant former des ensembles étendus. Ce théorème a déjà joué un rôle important dans les *Leçons sur les Fonctions de variables réelles* publiées, en 1905, par M. Emile Borel, dans sa « Collection de Monographies » où, d'ailleurs, le présent volume de M. Bernstein est également publié. Mais il s'agit ici de précisions, dues particulièrement aux idées de Tchebyscheff, auprès desquelles le théorème de Weierstrass ne semble plus qu'une généralité assez diffuse.

D'abord, comme le remarque l'auteur, il est évident qu'on ne peut parler, sans précautions spéciales, de convergence *uniforme* sur l'axe *réel* et il faut étendre cette notion à cet axe. Le *polynome* est également généralisé et devient une somme de termes tels que $a_i \varphi_i(x)$, les φ_i étant bornées et continues sur de certains segments.

Bien entendu, ces expresisons peuvent devenir des polynomes ordinaires en lesquels on retrouve celui de Tchebyscheff qui s'écarte le moins possible de zéro sur le segment A $(-1, +1)$. Puis, de ce problème fort particulier, nous nous élevons de nouveau à des généralités de plus en plus étendues avec les cas où le polynome cherché satisfait à des conditions extérieures à A, comme d'avoir, hors de A, des valeurs ou des racines données.

Les φ_i peuvent également devenir des fractions rationnelles, des fonctions circulaires... ; il y a, pour les polynomes généralisés, une règle de Descartes généralisée, et, dans le même ordre d'idées, des polynomes *oscillateurs* qui se prêtent notamment à la représentation de $|x|$. Enfin, on peut chercher à construire les polynomes d'approximation en tenant compte de propriétés imposées à leur dérivée. Tout ceci forme un premier chapitre se rapportant aux segments finis.

Avec le chapitre II, nous considérons les propriétés extrémales *sur tout l'axe réel* des fonctions dépendant d'un nombre fini ou infini de paramètres. Ici, d'ingénieuses propositions se présentent d'abord pour certaines fractions algébriques dont le numérateur est un polynome et dont le dénominateur est la racine carrée d'un autre polynome. On étudie de même des fractions rationnelles compliquées qui ne s'écartent que faiblement de types beaucoup

plus simples, à termes quadratiques par exemple. Puis, voici diverses conditions pour qu'une $f(x)$ soit développable en série de fractions rationnelles *à pôles donnés*. De mieux en mieux, nous atteignons les conditions pour qu'une fonction entière puisse rester bornée sur l'axe réel puis sur des demi-droites issues de l'origine et séparées par des angles égaux. En somme, il y a là, pour les fonctions entières, des lemmes de croissance qui sont lemmes de comparaison avec des expressions algébriques, trigonométriques..., généralement d'une simplicité et d'une originalité remarquables.

Cette impression s'accentue encore avec le Chapitre III relatif à la représentation par des polynomes de fonctions analytiques *à singularité donnée*. Les théorèmes curieux abondent.

La comparaison, avec une certaine suite géométrique, de la meilleure approximation par polynomes, d'une $f(x)$, conduit à une ellipse d'holomorphie pour cette $f(x)$. La singularité donnée peut être algébrique, logarithmique, essentielle, ce dernier cas étant naturellement le plus compliqué de beaucoup ; toutes les fois que le problème peut se résoudre, il l'est par des formules élégantes et simples. Le sujet a suscité également de beaux travaux de M. de la Vallée Poussin. M. Bernstein s'efforce plutôt de compléter que de reproduire ceux-ci.

Deux Notes terminent l'ouvrage. Dans la première, le savant auteur définit la fonction analytique dans le domaine *réel*, par la forme *continue* de son approximation polynomiale ; à une forme analogue mais *discontinue* correspond la fonction *quasi-analytique*. Ceci conduit à des théorèmes dus à MM. Hadamard, Denjoy, Carleman, ainsi qu'à M. Bernstein lui-même. La seconde Note a trait aux propriétés exceptionnelles des fonctions entières de genre zéro. On peut conclure, croyons-nous, que l'ouvrage est un des meilleurs qui soient quant au rattachement du réel à l'analytique ; il est, en son genre, aussi peu abstrait que possible, puisqu'il recherche dans les $f(z)$ ce qui permet de les représenter pour le mieux en x. Et la représentation éclaire souvent bien des points obscurs dans le champ complexe.

A. Buhl (Toulouse).

J. Hadamard. — **Cours d'Analyse** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. Premier fascicule. — 1 vol. gr. in-8° de 336 pages. Prix de la souscription au tome complet : 60 francs. J. Hermann. Paris. 1925.

On a souvent dit que le Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, publié autrefois par Camille Jordan, était aussi bien le Cours du Collège de France. On peut affirmer hautement que cette assertion restera vraie, avec plus de force encore, pour le cours de M. Hadamard. C'est de la rigueur présentée avec une élégance incomparable, ce qui saute aux yeux dès la Première Partie consacrée à des Compléments de Calcul différentiel. La plupart des choses enseignées en Mathématiques spéciales sont généralement admises, mais complétées en leurs points faibles avec une sûreté d'aperçus et une concision frappantes. Par exemple, nous voyons d'abord, comment une dérivée seconde peut, à l'instar d'une dérivée première, être considérée comme un quotient.

Les Jacobiens sont susceptibles d'une interprétation géométrique où intervient l'étendue, à deux ou trois dimensions, associée à des segments infiniment petits, interprétation qui, réciproquement, permet d'orienter rigoureusement de tels segments les uns par rapport aux autres.