Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

On peut donc écrire la formule suivante, analogue à celle d'HALPHEN:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2+1)^{\frac{n-1}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x}\right] = \mathrm{P}_n (x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}} e^{b \operatorname{arc\,tg} x} ,$$

P_n étant un polynome en b défini par les équations (9). On en déduit, en particulier, la formule

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2+1)^{\frac{2n-1}{2}} = (x^2+1)^{-\frac{2n+1}{2}} [1.3 \ldots (2n-1)]^2 .$$

Signalons enfin la relation de récurrence

$$(n-a)(n-2a+1)\Pi_{n+1} = n(n+1-a)[4(n-a)^2+b^2]\Pi_{n-1}$$
$$+ (2n-2a+1)[2(n-a)(n+1-a)x - ab]\Pi_n ;$$

comme la relation (6), cette relation n'est valable que si a et b sont supposés indépendants de n.

SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE

PAR

É. TURRIÈRE (Montpellier).

Ce travail concerne l'équation de DIOPHANTE,

$$x^4 + y^4 + z^4 = u^2 ,$$

en nombres indéterminés, et les formules elliptiques, avec les notations de WEIERSTRASS, permettant d'en obtenir des solutions dépendant de paramètres arbitraires. Il fait suite aux divers articles sur l'arithmogéométrie publiés dans l'*Enseignement mathématique* de 1915 à 1919 (t. XVII, p. 315; XVIII, p. 81; p. 397; XIX, p. 159; p. 233; XX, p. 161 et p. 245). Il se rattache à un mémoire sur les équations indéterminées de Fermat du *Bulletin de la Société mathématique de France* (sous presse).

LE PROBLÈME DE DIOPHANTE.

1. L'objet de la trente-deuxième proposition du V^e livre de l'Arithmétique de Diophante d'Alexandrie est de *trouver trois bicarrés dont la somme soit un carré parfait.* Il s'agit donc de résoudre en nombre rationnels l'équation indéterminée:

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

(la résolution en entiers en découlant). L'exemple donné par DIOPHANTE est celui des nombres

$$x = \frac{12}{5} , \quad y = 3 , \quad z = 4 .$$

Quelques réflexions viennent à l'esprit, à l'énoncé même de cette question vraiment inattendue dans cet ouvrage. DIOPHANTE vient de traiter, en effet, (V^e livre, problèmes 18 et 19) le cas de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 = U^2 ;$$

mais il passe sous silence les équations:

$$x^4 + y^4 = U^2 ,$$
$$x^4 - y^4 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = U^2 :$$

les deux premières sont impossibles; la troisième et la quatrième sont possibles. C'est l'observation consignée par FERMAT à propos du problème V, 32: « Cur autem non quaerat duo qua- « dratoquadratos quorum summa sit quadratus ? Sane haec « questio est impossibilis, ut nostra demonstrandi methodus « potest haud dubie expedire ».

Ainsi donc, alors que la moindre allusion ne se trouve faite à des équations plus simples de forme, DIOPHANTE soulève brusquement la question de la remarquable équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

et son analyse même, si elle ne fournit pas la solution générale, a le double mérite et d'une certaine généralité et d'une profonde signification arithmogéométrique. La méthode du mathématicien d'Alexandrie est extrêmement curieuse; elle consiste à prendre y et z égaux aux cathètes d'un arithmotriangle pythagorique quelconque, puis à poser

$$x = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}} ;$$

en d'autres termes, puisque la relation précédente n'est autre que celle,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} ,$$

qui relie la hauteur relative à l'hypoténuse aux deux côtés de l'angle droit, *la solution donnée par* DIOPHANTE *est constituée par les trois hauteurs d'un arithmotriangle pythagorique quelconque.*

Cette solution dépend non seulement du paramètre d'intérêt secondaire de similitude, mais aussi du paramètre caractéristique de la forme même du triangle. En introduisant la représentation arithmotrigonométrique (c'est-à-dire en prenant pour paramètre l'angle θ tel que tang $\frac{1}{2}\theta$ soit un nombre rationnel et arbitraire), à un facteur près de similitude, cette solution s'écrit sous la forme suivante:

$$y = \sin\theta , \qquad z = \cos\theta ,$$

$$x = \frac{1}{2}\sin 2\theta , \qquad U = 1 - \sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{y^2 + z^2} ,$$

comme celà résulte de l'identité:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta = (1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)^2 .$$

C'est ainsi qu'après la solution

$$x = 12 , \qquad y = 15 , \qquad z = 20 , \qquad U = 481 ,$$

de DIOPHANTE, il est possible de former toute une série de solutions relativement simples respectivement attachées aux triangles pythagoriques, par exemple:

$$x = 60 , \qquad y = 65 , \qquad z = 156 .$$

2. Pour résoudre ce problème, une méthode simple consiste à le rattacher aux équations de Fermat:

$$X = x^4 + a = \square \ .$$

Partons, en effet, d'une solution connue: elle est, par exemple, une de celles fournies par la considération des triangles pythagoriques. C'est ainsi qu'en prenant pour a la valeur

$$a = 12^4 + 20^4 = 2^9.353 \ ,$$

l'équation ci-dessus est vérifiée par $x = 15$, $\sqrt{X} = 481$. La solution générale de cette équation indéterminée de Fermat est:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u}{\wp u} \ , \qquad \sqrt{X} = \frac{\wp^2 u + \frac{1}{4} a}{\wp u} \ ,$$

$$\wp'^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 \ , \qquad g_2 = a \ , \qquad g_3 = 0 \ ;$$

la cubique normale est *harmonique*. En outre, d'après la formation même de l'équation considérée, g_2 est positif mais non carré parfait (puisque la somme de deux bicarrés n'est jamais égale à un carré). L'équation $\wp' u = 0$ a donc ses trois racines réelles; mais seule la racine $e_2 = \wp \omega_2 = 0$ $(u = \omega_2)$ est rationnelle, ce qui écarte pour l'application arithmétique, un certain nombre de formules utiles de la théorie des fonctions de Weierstrass. De toute racine connue, on déduira immédiatement $u + \omega_2$, $2u$, $3u$, etc... par des formules auxquelles le caractère harmonique de la cubique normale apporte des simplifications appréciables pour la rapidité des calculs. Le théorème d'addition permettra ensuite, deux solutions quelconques u et v étant acquises, de former de nouvelles solutions $u \pm v$, etc...:

$$\wp(u + \omega_1) = - \frac{\frac{1}{4} \cdot g_2}{\wp u} \ ,$$

$$\wp 2u = \left[\frac{\wp^2 u + \frac{1}{4} g_2}{\wp' u} \right]^2 ,$$

$$\wp' 2u = \frac{2\sqrt{\wp 2u}}{\wp'^2 u} \left[\left(\wp^2 u + \frac{1}{4} g_2 \right)^2 - 2 g_2 \wp^2 u \right] .$$

La solution primitive $\mathfrak{p}u$ est déterminée au moyen de la solution considérée du problème de DIOPHANTE. Les formules de correspondance,

$$2x = \frac{\mathfrak{p}'u}{\mathfrak{p}u}, \qquad \pm U = x^2 - 2\mathfrak{p}u,$$

donnent:

$$\mathfrak{p}u = \frac{1}{2}(x^2 \pm U), \qquad \mathfrak{p}'u = 2x.\mathfrak{p}u,$$

d'où deux valeurs distinctes de $\mathfrak{p}u$; leur produit est identiquement égal à $-\frac{1}{4}g_2$: la somme ou la différence des arguments est donc égale à la demi-période réelle ω_2. En fait, aux périodes près, sont connues initialement quatre solutions, correspondant à quatre points de la cubique. L'un des arguments étant u, les autres sont $-u$, $u + \omega_2$ et $\omega_2 - u$.

Dans le cas $g_2 = 2^9.353$, $g_3 = 0$, la connaissance de $x = 15$, $U = 481$, donne donc:

$$\mathfrak{p}u = 353, \qquad \mathfrak{p}'u = -10\cdot590, \qquad \mathfrak{p}''u = 2.353.931,$$

$$\mathfrak{p}(u + \omega_2) = -128, \qquad \mathfrak{p}'(u + \omega_2) = 3\cdot840, \qquad \mathfrak{p}''(u + \omega_2) = 2^8.31,$$

$$\mathfrak{p}\,2u = \left(\frac{481}{30}\right)^2, \qquad \mathfrak{p}'2u = \frac{481 \times 130\cdot111}{2^2.3^3.5^3}.$$

$$\mathfrak{p}(2u + \omega_2) = -\frac{2^9.3^2.5^2.353}{481^2};$$

d'où la nouvelle solution du problème de Diophante:

$$x = \frac{130\cdot111}{2.3.5.481}, \qquad y = 12, \qquad z = 20.$$

3. — La connaissance d'une solution quelconque (x, y, z) du problème de Diophante permet de lui associer trois équations de Weierstrass distinctes, chacune de celles-ci ayant une solution connue; à la solution même de DIOPHANTE sont ainsi associées les trois équations avec $g_3 = 0$ et les valeurs respectives de g_2 suivantes:

$$g_2 = 2^9.353, \qquad x = 15, \qquad \text{(I)}$$

$$g_2 = 3^4.881, \qquad x = 20, \qquad \text{(II)}$$

$$g_2 = 5^4.337, \qquad x = 12. \qquad \text{(III)}$$

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$\wp u = -\frac{81}{2}, \quad \wp' u = -20.81,$$

$$\wp(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \quad \wp'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \quad \wp' 2u = \frac{481 \times 88\cdot 639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88\cdot 639}{80.481}, \quad y = 12, \quad z = 15,$$

Enfin dans le III^e cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \quad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$\wp u = \frac{625}{2}, \quad \wp' u = 12 \times 625, \quad \wp'' u = 625 \times 769$$

$$\wp(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad \wp''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$\wp 2u = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

FORMULES POUR $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r, l'équation cubique admet les solutions:

$$\wp u = \frac{1}{2}, \quad \wp' u = \pm r;$$

$$\wp(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$\wp 2u = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \quad \wp' 2u = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3}(r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$\wp(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \quad \wp'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1)\frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$

En prenant maintenant r de la forme spéciale $r = \sin\theta\cos\theta$ (avec $\tang\frac{1}{2}\theta$ rationnel), l'invariant g_2 est précisément égal à $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ et les formules précédentes s'appliquent au premier cas qui se pose dans l'étude générale du problème de Diophante, sous le point de vue même qui a été exposé sur des exemples numériques.

Ce même type d'équation, mais avec l'hypothèse $r = \frac{1}{2}$, contient la solution d'un problème célèbre. Ce cas ne rentre pas dans celui des équations associées au problème de DIOPHANTE, car la relation $2\sin\theta\cos\theta = 1$ exprime que l'aire de l'arithmotriangle pythagorique est carré parfait, ce qui est impossible (FERMAT). Mais alors l'équation avec $g_2 = \frac{1}{2}$, $g_3 = 0$, n'est autre que celle des *triangles pythagoriques dont l'hypoténuse est carré parfait, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit* et des diverses équations indéterminées qui ont été rattachées par EULER, LAGRANGE, etc., à ce problème (voir *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli*, dans l'*Enseignement mathématique* de juin 1919, t. XX, p. 245-268) [1].

FORMULES POUR $g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)$, $g_3 = 0$.

5. — Un second cas à traiter est celui où g_2 est égal à

$$g_2 = \sin^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad \cos^4\theta + \sin^4\cos^4\theta\ ;$$

par une transformation immédiate, il est réductible à

$$g_2 = 1 + \cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad 1 + \sin^4\theta\ .$$

Nous prendrons:

$$g_2 = (1 - t^2)^4 + (1 + t^2)^4 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)\ ,$$

t est un nombre rationnel arbitraire; $t = \tang\frac{1}{2}\theta$. Les fonctions pu et $p'u$ ont été multipliées par les facteurs

$$\frac{(1+t^2)^4}{4t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{(1+t^2)^6}{8t^3}\ .$$

---

[1] Je profite de l'occasion pour signaler que, sur la même question et en même temps que mon travail, paraissait un mémoire de M. Michele CIPOLLA: *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, dans les *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, V^{me} série, vol. XI, mémoire XI, 1° maggio 1919.

Si donc nous posons toujours

$$\wp'^2 u = 4\wp u(\wp^2 u - g_2) ,$$

avec la valeur spécifiée ci-dessus de l'invariant g_2 en fonction entière de t^4, les formules de correspondance avec le problème de DIOPHANTE sont maintenant:

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u} , \qquad U = x^2 - 2\wp u ,$$

$$y = 1 - t^2 , \qquad z = 1 + t^2 .$$

Parmi les solutions, celle de DIOPHANTE est

$$x = \frac{1 - t^4}{2t} , \qquad U = \frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} - (1 - t^2)^2 .$$

La solution correspondante de l'équation de la fonction de WEIERSTRASS est:

$$\wp u = -2t^2 , \qquad \wp' u = \pm 2t(t^4 - 1) ,$$

$$\wp(u + \omega_2) = \frac{g_2}{8t^2} , \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm \frac{g_2(1 + t^2)}{8t^3} ,$$

$$\sqrt{\wp 2u} = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{4t(t^4 - 1)} ,$$

$$\wp' 2u = \pm \frac{t^8 + 14t^4 + 1}{32t^3(t^4 - 1)^3}(t^{16} - 36t^{12} - 186t^8 - 36t^4 + 1) ;$$

à remarquer la présence du facteur octaédrique $t^8 + 14t^4 + 1$.

Pour $t = 2$, ces formules donnent $g_2 = 706 = 2 \times 353$,

$$\wp u = -8 , \qquad \wp' u = 60 ,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{120}\right)^2 , \qquad \wp' 2u = \frac{130\,111 \times 481}{2^8 . 3^3 . 5^3} .$$

d'où la solution $x = \dfrac{130\,111}{2^3 . 3 . 5 . 481}$, $y = 3$, $z = 5$ antérieurement donnée.

SUR CERTAINS TRIANGLES ARITHMOGÉOMÉTRIQUES.

6. — La question précédente pose la recherche des *triangles tels que la somme des quatrièmes puissances de deux de leurs côtés*

et de la hauteur issue du sommet qu'ils définissent soit un carré parfait.

Tout arithmotriangle pythagorique est de cette nature. Il en est de même de tout *arithmotriangle héronien tel que les deux bissectrices intérieure et extérieure issues d'un même sommet soient égales*. Ces triangles, définis par la condition $C - B = \frac{\pi}{2}$, se construisent simplement au moyen des triangles rectangles. Ils peuvent être arithmogéométriquement représentés par les formules:

$$A = \frac{\pi}{2} - 2\theta, \qquad a = \cos 2\theta,$$

$$B = \theta, \qquad b = \sin\theta,$$

$$C = \frac{\pi}{2} + 2\theta, \qquad c = \cos\theta.$$

$$2R = 1, \qquad S = \frac{1}{8}\sin 4\theta;$$

de même que pour les triangles pythagoriques, cette surface S ne saurait être mesurée par un nombre carré parfait. Les deux bissectrices des angles en A ont pour longueur commune $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\theta$. Les bissectrices intérieure et extérieure issues du sommet B ont pour longueurs respectives

$$\frac{\cos\theta . \cos 2\theta}{\cos\frac{3}{2}\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\theta . \cos 2\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta};$$

elles peuvent être mesurées rationnellement (pour $\operatorname{tang}\frac{1}{4}\theta$ rationnel). En aucun cas, il ne peut en être de même des bissectrices égales issues de A ni de celles des angles en C.

La solution du problème arithmogéométrique posé est difficile; mais son étude met en évidence une équation intéressante. En exprimant que $b^4 + c^4 + h_a^4 = \square$, on obtient en effet l'équation de Fermat:

$$x^4 + 2\frac{\cos 2A}{\sin^2 A}x^2 + 4 . \operatorname{cotg} A . x + 1 = y^2 .$$

ou encore

$$(x^2 - 1)^2 + 2x \operatorname{cotg} A (x \operatorname{cotg} A + 2) = y^2,$$

où $x = \frac{h_a}{a}$. Cette équation admet les solutions évidentes

$$x = 0 \;, \quad \infty \;, \quad -2 \operatorname{tang} A \;, \quad \frac{2 \operatorname{cotg} A}{2 - \operatorname{cotg}^2 A} \;, \quad \frac{1}{4} \operatorname{cotg} A (\operatorname{cotg}^2 A - 2) \;,$$

quelle que soit la valeur rationnelle de tang A. En outre elle est satisfaite identiquement pour $A = \frac{\pi}{2}$ (c'est le cas des triangles rectangles); pour $B - C = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} A$ est solution (triangle à bissectrices égales, issues de A).

En posant $\operatorname{cotg} A = \gamma$, l'équation devient

$$y^2 = (x^2 - 1)^2 + 2\gamma x(\gamma x + 2) \;;$$

elle permet d'étudier les triangles jouissant de la propriété indiquée que $b^4 + c^4 + h_a^4$ est le carré d'un nombre rationnel, pour des valeurs rationnelles de $\frac{h_a}{a}$ et de tang A. Les formules de réduction aux fonctions elliptiques sont:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \;, \qquad \pm y = \wp(u + v) - \wp u = x^2 + \beta - 2\wp u \;,$$

$$\beta = \frac{1}{3}(\gamma^2 - 1) \;,$$

$$g_2 = 1 + 3\beta^2 \qquad = \frac{1}{3}(\gamma^4 - 2\gamma^2 + 4) > 0 \;,$$

$$g_3 = -(1 + 2\beta + \beta^3) = -\frac{1}{27}(\gamma^6 - 3\gamma^4 + 21\gamma^2 + 8) < 0 \;,$$

$$\Delta = -\gamma^2(\gamma^6 - 2\gamma^4 + 11\gamma^2 + 16) < 0 \;;$$

v étant un argument constant défini par les équations concordantes:

$$\wp v = -\beta \;, \quad \wp' v = \gamma \;, \quad \wp'' v = \frac{1}{2}\gamma^2(\gamma^2 - 2) \;,$$

$$\wp 2v = \frac{1}{48}(3\gamma^6 - 12\gamma^4 + 44\gamma^2 - 32) \;,$$

$$\wp' 2v = -\frac{1}{32}\gamma(\gamma^8 - 6\gamma^6 + 28\gamma^4 - 56\gamma^2 + 64) \;,$$

on obtient les solutions suivantes, relativement simples pour ce genre de questions, et qui peuvent être exprimées au moyen d'un certain argument constant w:

$$\wp 2w = \frac{1}{3}(2\gamma^2 + 1), \qquad \wp' 2w = -\gamma(1 + \gamma^2),$$

$$\wp 4w = \frac{11\gamma^6 + 20\gamma^4 - 20\gamma^2 - 32}{48(\gamma^2 + 1)^2},$$

$$\wp\left(w - \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 + 2), \qquad \wp'\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma, \qquad \wp''\left(w - \frac{v}{2}\right) = \gamma^2,$$

$$\wp\left(w + \frac{v}{2}\right) = \frac{1}{6}(\gamma^2 - 4), \qquad \wp'\left(w + \frac{v}{2}\right) = -\gamma, \qquad \wp'' = 2 - \gamma^2,$$

$$\wp\left(w - \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \qquad \wp' = -\frac{\gamma^4 - 4\gamma^2 + 16}{\gamma^3},$$

$$\wp\left(w + \frac{3}{2}v\right) = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 20\gamma^2 + 8}{6(\gamma^2 - 2)^2}, \qquad \wp' = \frac{2\gamma^4 - 3\gamma^2 + 8}{(2 - \gamma^2)^3},$$

$$\wp(2w - v) = -\frac{1}{12}(\gamma^2 + 8), \qquad \wp' = \frac{1}{4}\gamma^3,$$

$$\wp(2w + v) = \frac{-\gamma^4 + 4\gamma^2 + 12}{12\gamma^2}, \qquad \wp' = \frac{\gamma^6 - 2\gamma^4 + 4\gamma^2 + 8}{4\gamma^3},$$

$$\wp(4w - 2v) = \frac{11\gamma^8 + 16\gamma^6 + 96\gamma^4 + 768\gamma^2 + 768}{48\gamma^6},$$

$$\wp\left(3w - \frac{v}{2}\right) = \frac{\gamma^4 + 20\gamma^2 + 24}{6\gamma^2}, \qquad \wp' = \frac{5\gamma^4 + 20\gamma^2 + 16}{\gamma^3}.$$

L'ÉQUATION $\mu y^2 = x^4 + a$.

7. — Soient a et μ deux nombres rationnels donnés et soit $(x_0 y_0)$ une solution primitive de l'équation indéterminée

$$\mu y^2 = x^4 + a.$$

Cette solution particulière peut être rejetée à l'infini par la transformation homographique

$$x = x_0 + \frac{\mu y_0^2}{X}, \qquad y = y_0 . Y,$$

qui transforme l'équation considérée en l'équation suivante de FERMAT:

$$(YX^2)^2 = X^4 + 4x_0^3 X^3 + 6\mu x_0^2 y_0^2 X + 4\mu^2 x_0 y_0^4 X + \mu^3 y_0^6.$$

Les formules de représentation des solutions au moyen des fonctions elliptiques sont:

$$g_2 = a\mu^2 y_0^4 , \qquad g_3 = 0 ;$$

$$\wp v = - a x_0^2 , \qquad \wp' v = a x_0 (a - x_0^4) ,$$

$$\wp'' v = - \frac{1}{2} a (x_0^8 - 10 a x_0^4 + a^2) ;$$

$$X + x_0^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} , \qquad Y = \pm \frac{1}{X^2} [\wp (u + v) - \wp u] .$$

8. *Généralisation de l'équation de Diophante.* — Les résultats ci-dessus trouvent leur application immédiate dans la résolution, à partir d'une solution primitive, des équations indéterminées du type

$$\mu y^2 = x^4 + z^4 + t^4 .$$

μ étant un nombre rationnel donné. Par exemple, dans le cas ($\mu = 3$), la solution de

$$3y^2 = x^4 + z^4 + t^4$$

résulte de la connaissance de la solution primitive (1, 1, 1, 1): en prenant donc

$$a = 2 , \quad g_2 = 18 , \quad g_3 = 0 , \quad x_0 = 1 , \quad y_0 = 1 ,$$
$$\wp v = - 2 , \quad \wp' v = - 2 , \quad \wp'' v = 15 ,$$

la solution $u = v$ donne à la limite:

$$X + 1 = \frac{1}{2} \frac{\wp'' v}{\wp' v} , \qquad X = \frac{11}{4} , \qquad x = \frac{23}{11} ,$$

d'où

$$23^4 + 11^4 + 11^4 = 3 . (3 . 107)^2 ;$$

on aurait ensuite

$$\wp 2v = \left(\frac{17}{4}\right)^2 , \qquad \wp' 2v = - \frac{4879}{32} , \quad \text{etc.} \dots$$

9. *L'équation* $2y^2 = x^4 + z^4 + t^4$. — Parmi les équations qui viennent d'être traitées d'une manière générale, celle qui correspond au cas $\mu = 2$ *(trouver trois nombres dont la somme des*

bicarrés soit le double d'un carré) est particulièrement intéressante: une solution primitive dépendant d'un paramètre arbitraire est en effet connue. Si trois nombres rationnels algébriques ont leur somme nulle, la somme de leurs bicarrés est toujours le double d'un carré; cela résulte de l'identité algébrique:

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 \equiv 2(x^2 + xy + y^2)^2 \; .$$

Si donc b et c sont deux nombres rationnels quelconques, l'équation

$$2y^2 = x^4 + b^4 + c^4 \; , \qquad (a = b^4 + c^4) \; ,$$

admet toujours la solution primitive

$$x_0 = b + c \; , \qquad y_0 = b^2 + bc + c^2 \; ,$$

comme le justifient en particulier les égalités:

$$1^4 + 1^4 + 2^4 = 2.3^2 \; ,$$
$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 2.7^2 \; , \quad \text{etc.} \ldots$$

Alors:

$$g_2 = 4a(b^2 + bc + c^2)^4(b^4 + c^4) \; , \qquad g_3 = 0 \; ,$$
$$\wp v = -(b^4 + c^4)(b + c)^2 \; ,$$
$$\wp' v = -2bc(b + c)(b^4 + c^4)(2b^2 + 3bc + 2c^2) \; ;$$

la solution limite pour $u = v$ est en particulier:

$$X = -\frac{x_0^8 + 8ax_0^4 - a^2}{2x_0(x_0^4 - a)} \; , \qquad Y = \frac{\wp 2v - \wp v}{X^2} \; .$$

Parmi les solutions simples de cette équation, sont à signaler les suivantes (avec des nombres tels qu'aucun d'eux ne soit somme des deux autres):

$$1^4 + 3^4 + 10^4 = 2.71^2 \; ,$$
$$7^4 + 7^4 + 12^4 = 2.113^2 \; ,$$
$$23^4 + 46^4 + 121^4 = 2.(10\,467)^2 \; ,$$
$$26^4 + 239^4 + 239^4 = 2.(57\,123)^2 \; .$$