Le problème de Diophante.

1. L'objet de la trente-deuxième proposition du V^e livre de l'Arithmétique de Diophante d'Alexandrie est de *trouver trois bicarrés dont la somme soit un carré parfait.* Il s'agit donc de résoudre en nombre rationnels l'équation indéterminée:

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

(la résolution en entiers en découlant). L'exemple donné par Diophante est celui des nombres

$$x = \frac{12}{5} , \qquad y = 3 , \qquad z = 4 .$$

Quelques réflexions viennent à l'esprit, à l'énoncé même de cette question vraiment inattendue dans cet ouvrage. Diophante vient de traiter, en effet, (V^e livre, problèmes 18 et 19) le cas de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 = U^2 ;$$

mais il passe sous silence les équations:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= U^2 , \\ x^4 - y^4 &= U^2 , \\ x^3 + y^3 &= U^2 , \\ x^3 + y^3 + z^3 &= U^2 : \end{aligned}$$

les deux premières sont impossibles; la troisième et la quatrième sont possibles. C'est l'observation consignée par Fermat à propos du problème V, 32: « Cur autem non quaerat duo qua-« dratoquadratos quorum summa sit quadratus ? Sane haec « questio est impossibilis, ut nostra demonstrandi methodus « potest haud dubie expedire ».

Ainsi donc, alors que la moindre allusion ne se trouve faite à des équations plus simples de forme, Diophante soulève brusquement la question de la remarquable équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

et son analyse même, si elle ne fournit pas la solution générale, a le double mérite et d'une certaine généralité et d'une profonde signification arithmogéométrique. La méthode du mathématicien d'Alexandrie est extrêmement curieuse; elle consiste à prendre y et z égaux aux cathètes d'un arithmotriangle pythagorique quelconque, puis à poser

$$x = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}} ;$$

en d'autres termes, puisque la relation précédente n'est autre que celle,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} ,$$

qui relie la hauteur relative à l'hypoténuse aux deux côtés de l'angle droit, *la solution donnée par* DIOPHANTE *est constituée par les trois hauteurs d'un arithmotriangle pythagorique quelconque.*

Cette solution dépend non seulement du paramètre d'intérêt secondaire de similitude, mais aussi du paramètre caractéristique de la forme même du triangle. En introduisant la représentation arithmotrigonométrique (c'est-à-dire en prenant pour paramètre l'angle θ tel que $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ soit un nombre rationnel et arbitraire), à un facteur près de similitude, cette solution s'écrit sous la forme suivante:

$$y = \sin\theta , \qquad z = \cos\theta ,$$

$$x = \frac{1}{2}\sin 2\theta , \qquad U = 1 - \sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{y^2 + z^2} ,$$

comme celà résulte de l'identité:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta = (1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)^2 .$$

C'est ainsi qu'après la solution

$$x = 12 , \quad y = 15 , \quad z = 20 , \quad U = 481 ,$$

de DIOPHANTE, il est possible de former toute une série de solutions relativement simples respectivement attachées aux triangles pythagoriques, par exemple:

$$x = 60 , \quad y = 65 , \quad z = 156 .$$

2. Pour résoudre ce problème, une méthode simple consiste à le rattacher aux équations de Fermat:

$$X = x^4 + a = \square \ .$$

Partons, en effet, d'une solution connue: elle est, par exemple, une de celles fournies par la considération des triangles pythagoriques. C'est ainsi qu'en prenant pour a la valeur

$$a = 12^4 + 20^4 = 2^9.353 \ ,$$

l'équation ci-dessus est vérifiée par $x = 15$, $\sqrt{X} = 481$. La solution générale de cette équation indéterminée de Fermat est:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\wp' u}{\wp u}, \qquad \sqrt{X} = \frac{\wp^2 u + \frac{1}{4} a}{\wp u} \ ,$$

$$\wp'^2 = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3 \ , \qquad g_2 = a \ , \qquad g_3 = 0 \ ;$$

la cubique normale est *harmonique*. En outre, d'après la formation même de l'équation considérée, g_2 est positif mais non carré parfait (puisque la somme de deux bicarrés n'est jamais égale à un carré). L'équation $\wp' u = 0$ a donc ses trois racines réelles; mais seule la racine $e_2 = \wp\omega_2 = 0$ $(u = \omega_2)$ est rationnelle, ce qui écarte pour l'application arithmétique, un certain nombre de formules utiles de la théorie des fonctions de Weierstrass. De toute racine connue, on déduira immédiatement $u + \omega_2$, $2u$, $3u$, etc... par des formules auxquelles le caractère harmonique de la cubique normale apporte des simplifications appréciables pour la rapidité des calculs. Le théorème d'addition permettra ensuite, deux solutions quelconques u et v étant acquises, de former de nouvelles solutions $u \pm v$, etc...:

$$\wp(u + \omega_1) = - \frac{\frac{1}{4} \cdot g_2}{\wp u} \ ,$$

$$\wp 2u = \left[\frac{\wp^2 u + \frac{1}{4} g_2}{\wp' u} \right]^2 ,$$

$$\wp' 2u = \frac{2\sqrt{\wp 2u}}{\wp'^2 u} \left[\left(\wp^2 u + \frac{1}{4} g_2 \right)^2 - 2 g_2 \wp^2 u \right] .$$

La solution primitive $\mathfrak{p}u$ est déterminée au moyen de la solution considérée du problème de DIOPHANTE. Les formules de correspondance,

$$2x = \frac{\mathfrak{p}'u}{\mathfrak{p}u}, \qquad \pm U = x^2 - 2\mathfrak{p}u ,$$

donnent:

$$\mathfrak{p}u = \frac{1}{2}(x^2 \pm U) , \qquad \mathfrak{p}'u = 2x.\mathfrak{p}u ,$$

d'où deux valeurs distinctes de $\mathfrak{p}u$; leur produit est identiquement égal à $-\frac{1}{4}g_2$: la somme ou la différence des arguments est donc égale à la demi-période réelle ω_2. En fait, aux périodes près, sont connues initialement quatre solutions, correspondant à quatre points de la cubique. L'un des arguments étant u, les autres sont $-u$, $u + \omega_2$ et $\omega_2 - u$.

Dans le cas $g_2 = 2^9.353$, $g_3 = 0$, la connaissance de $x = 15$, $U = 481$, donne donc:

$$\mathfrak{p}u = 353 , \quad \mathfrak{p}'u = -10\cdot590 , \quad \mathfrak{p}''u = 2.353.931 ,$$

$$\mathfrak{p}(u + \omega_2) = -128 , \quad \mathfrak{p}'(u + \omega_2) = 3\cdot840 , \quad \mathfrak{p}''(u + \omega_2) = 2^8.31 ,$$

$$\mathfrak{p}\,2u = \left(\frac{481}{30}\right)^2, \qquad \mathfrak{p}'2u = \frac{481 \times 130\cdot111}{2^2.3^3.5^3} .$$

$$\mathfrak{p}(2u + \omega_2) = -\frac{2^9.3^2.5^2.353}{481^2} ;$$

d'où la nouvelle solution du problème de Diophante:

$$x = \frac{130\cdot111}{2.3.5.481}, \qquad y = 12 , \qquad z = 20 .$$

3. — La connaissance d'une solution quelconque (x, y, z) du problème de Diophante permet de lui associer trois équations de Weierstrass distinctes, chacune de celles-ci ayant une solution connue; à la solution même de DIOPHANTE sont ainsi associées les trois équations avec $g_3 = 0$ et les valeurs respectives de g_2 suivantes:

$$g_2 = 2^9.353 , \qquad x = 15 , \qquad \text{(I)}$$

$$g_2 = 3^4.881 , \qquad x = 20 , \qquad \text{(II)}$$

$$g_2 = 5^4.337 , \qquad x = 12 . \qquad \text{(III)}$$

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$\wp u = -\frac{81}{2}, \quad \wp' u = -20.81,$$

$$\wp(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \quad \wp'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \quad \wp' 2u = \frac{481 \times 88\cdot 639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88\cdot 639}{80.481}, \quad y = 12, \quad z = 15,$$

Enfin dans le III^e cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \quad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$\wp u = \frac{625}{2}, \quad \wp' u = 12 \times 625, \quad \wp'' u = 625 \times 769$$

$$\wp(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad \wp''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$\wp 2u = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r, l'équation cubique admet les solutions:

$$\wp u = \frac{1}{2}, \quad \wp' u = \pm r;$$

$$\wp(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$\wp 2u = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \quad \wp' 2u = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3}(r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$\wp(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \quad \wp'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1)\frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$