Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOLUTION D'UN PROBLÈME DE DIOPHANTE
Autor: Turrière, É.
Kapitel: problème de Diophante.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20683

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Le problème de Diophante.

1. L'objet de la trente-deuxième proposition du Ve livre de l'Arithmétique de Diophante d'Alexandrie est de *trouver trois bicarrés dont la somme soit un carré parfait.* Il s'agit donc de résoudre en nombre rationnels l'équation indéterminée:

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

(la résolution en entiers en découlant). L'exemple donné par Diophante est celui des nombres

$$x = \frac{12}{5} , \qquad y = 3 , \qquad z = 4 .$$

Quelques réflexions viennent à l'esprit, à l'énoncé même de cette question vraiment inattendue dans cet ouvrage. Diophante vient de traiter, en effet, (V^e livre, problèmes 18 et 19) le cas de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3 = U^2 ;$$

mais il passe sous silence les équations:

$$x^4 + y^4 = U^2 ,$$
$$x^4 - y^4 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 = U^2 ,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = U^2 ;$$

les deux premières sont impossibles; la troisième et la quatrième sont possibles. C'est l'observation consignée par Fermat à propos du problème V, 32: « Cur autem non quaerat duo qua-« dratoquadratos quorum summa sit quadratus ? Sane haec « questio est impossibilis, ut nostra demonstrandi methodus « potest haud dubie expedire ».

Ainsi donc, alors que la moindre allusion ne se trouve faite à des équations plus simples de forme, Diophante soulève brusquement la question de la remarquable équation

$$x^4 + y^4 + z^4 = U^2 ,$$

et son analyse même, si elle ne fournit pas la solution générale, a le double mérite et d'une certaine généralité et d'une profonde

signification arithmogéométrique. La méthode du mathématicien d'Alexandrie est extrêmement curieuse; elle consiste à prendre y et z égaux aux cathètes d'un arithmotriangle pythagorique quelconque, puis à poser

$$x = \frac{yz}{\sqrt{y^2 + z^2}} ;$$

en d'autres termes, puisque la relation précédente n'est autre que celle,

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} ,$$

qui relie la hauteur relative à l'hypoténuse aux deux côtés de l'angle droit, *la solution donnée par* DIOPHANTE *est constituée par les trois hauteurs d'un arithmotriangle pythagorique quelconque.*

Cette solution dépend non seulement du paramètre d'intérêt secondaire de similitude, mais aussi du paramètre caractéristique de la forme même du triangle. En introduisant la représentation arithmotrigonométrique (c'est-à-dire en prenant pour paramètre l'angle θ tel que $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$ soit un nombre rationnel et arbitraire), à un facteur près de similitude, cette solution s'écrit sous la forme suivante:

$$y = \sin\theta , \qquad z = \cos\theta ,$$

$$x = \frac{1}{2}\sin 2\theta , \qquad U = 1 - \sin^2\theta\cos^2\theta = 1 - \frac{x^2}{y^2 + z^2} ,$$

comme celà résulte de l'identité:

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta = (1 - \sin^2\theta\cos^2\theta)^2 .$$

C'est ainsi qu'après la solution

$$x = 12 , \qquad y = 15 , \qquad z = 20 , \qquad U = 481 ,$$

de DIOPHANTE, il est possible de former toute une série de solutions relativement simples respectivement attachées aux triangles pythagoriques, par exemple:

$$x = 60 , \qquad y = 65 , \qquad z = 156 .$$

2. Pour résoudre ce problème, une méthode simple consiste à le rattacher aux équations de Fermat:

$$X = x^4 + a = \square .$$

Partons, en effet, d'une solution connue: elle est, par exemple, une de celles fournies par la considération des triangles pythagoriques. C'est ainsi qu'en prenant pour a la valeur

$$a = 12^4 + 20^4 = 2^9.353 ,$$

l'équation ci-dessus est vérifiée par $x = 15$, $\sqrt{X} = 481$. La solution générale de cette équation indéterminée de Fermat est:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{p'u}{pu} , \qquad \sqrt{X} = \frac{p^2u + \frac{1}{4}a}{pu} ,$$

$$p'^2 = 4p^3u - g_2 pu - g_3 , \qquad g_2 = a , \qquad g_3 = 0 ;$$

la cubique normale est *harmonique*. En outre, d'après la formation même de l'équation considérée, g_2 est positif mais non carré parfait (puisque la somme de deux bicarrés n'est jamais égale à un carré). L'équation $p'u = 0$ a donc ses trois racines réelles; mais seule la racine $e_2 = p\omega_2 = 0$ $(u = \omega_2)$ est rationnelle, ce qui écarte pour l'application arithmétique, un certain nombre de formules utiles de la théorie des fonctions de Weierstrass. De toute racine connue, on déduira immédiatement $u + \omega_2$, $2u$, $3u$, etc... par des formules auxquelles le caractère harmonique de la cubique normale apporte des simplifications appréciables pour la rapidité des calculs. Le théorème d'addition permettra ensuite, deux solutions quelconques u et v étant acquises, de former de nouvelles solutions $u \pm v$, etc...:

$$p(u + \omega_1) = -\frac{\frac{1}{4} \cdot g_2}{pu} ,$$

$$p2u = \left[\frac{p^2u + \frac{1}{4}g_2}{p'u}\right]^2 ,$$

$$p'2u = \frac{2\sqrt{p2u}}{p'^2u}\left[\left(p^2u + \frac{1}{4}g_2\right)^2 - 2g_2 p^2u\right] .$$

La solution primitive $\wp u$ est déterminée au moyen de la solution considérée du problème de DIOPHANTE. Les formules de correspondance,

$$2x = \frac{\wp' u}{\wp u}, \qquad \pm \mathrm{U} = x^2 - 2\wp u,$$

donnent:

$$\wp u = \frac{1}{2}(x^2 \pm \mathrm{U}), \qquad \wp' u = 2x.\wp u,$$

d'où deux valeurs distinctes de $\wp u$; leur produit est identiquement égal à $-\frac{1}{4} g_2$: la somme ou la différence des arguments est donc égale à la demi-période réelle ω_2. En fait, aux périodes près, sont connues initialement quatre solutions, correspondant à quatre points de la cubique. L'un des arguments étant u, les autres sont $-u$, $u + \omega_2$ et $\omega_2 - u$.

Dans le cas $g_2 = 2^9.353$, $g_3 = 0$, la connaissance de $x = 15$, $\mathrm{U} = 481$, donne donc:

$$\wp u = 353, \qquad \wp' u = -10.590, \qquad \wp'' u = 2.353.931,$$

$$\wp(u + \omega_2) = -128, \qquad \wp'(u + \omega_2) = 3.840, \qquad \wp''(u + \omega_2) = 2^8.31,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{30}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \frac{481 \times 130.111}{2^2.3^3.5^3}.$$

$$\wp(2u + \omega_2) = -\frac{2^9.3^2.5^2.353}{481^2};$$

d'où la nouvelle solution du problème de Diophante:

$$x = \frac{130.111}{2.3.5.481}, \qquad y = 12, \qquad z = 20.$$

3. — La connaissance d'une solution quelconque (x, y, z) du problème de Diophante permet de lui associer trois équations de Weierstrass distinctes, chacune de celles-ci ayant une solution connue; à la solution même de DIOPHANTE sont ainsi associées les trois équations avec $g_3 = 0$ et les valeurs respectives de g_2 suivantes:

$$g_2 = 2^9.353, \qquad x = 15, \qquad \text{(I)}$$

$$g_2 = 3^4.881, \qquad x = 20, \qquad \text{(II)}$$

$$g_2 = 5^4.337, \qquad x = 12. \qquad \text{(III)}$$

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$\wp u = -\frac{81}{2}, \qquad \wp' u = -20.81,$$

$$\wp(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \qquad \wp'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \frac{481 \times 88{\cdot}639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88{\cdot}639}{80.481}, \qquad y = 12, \qquad z = 15,$$

Enfin dans le IIIe cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \qquad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$\wp u = \frac{625}{2}, \qquad \wp' u = 12 \times 625, \qquad \wp'' u = 625 \times 769$$

$$\wp(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad \wp''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$\wp 2u = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r, l'équation cubique admet les solutions:

$$\wp u = \frac{1}{2}, \qquad \wp' u = \pm r;$$

$$\wp(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \qquad \wp'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$\wp 2u = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \qquad \wp' 2u = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3}(r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$\wp(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \qquad \wp'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1)\frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$