Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Dans le cas de l'équation II, les valeurs $x = 20$, $U = 81.881$ conduisent à

$$\wp u = -\frac{81}{2}, \quad \wp' u = -20.81,$$

$$\wp(u + \omega_3) = \frac{881}{2}, \quad \wp'(u + \omega_3) = 20.881,$$

$$\wp 2u = \left(\frac{481}{40}\right)^2, \quad \wp' 2u = \frac{481 \times 88{\cdot}639}{40^3},$$

d'où la solution:

$$x = \frac{88{\cdot}639}{80.481}, \quad y = 12, \quad z = 15,$$

Enfin dans le III^e cas,

$$g_2 = 5^4 \times 337, \quad g_3 = 0,$$

la solution primitive sera

$$\wp u = \frac{625}{2}, \quad \wp' u = 12 \times 625, \quad \wp'' u = 625 \times 769$$

$$\wp(u + \omega_2) = -\frac{337}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = 12 \times 337, \quad \wp''(u + \omega_2) = 337 \times 193$$

d'où:

$$\wp 2u = \left[\frac{13 \times 37}{24}\right]^2.$$

Formules pour $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$.

4. — Soit une équation définissant, d'une manière plus générale, une fonction de Weierstrass avec les invariants $g_2 = 1 - 2r^2$, $g_3 = 0$; r est un paramètre rationnel et quelconque. Quelle que soit la valeur de ce paramètre r, l'équation cubique admet les solutions:

$$\wp u = \frac{1}{2}, \quad \wp' u = \pm r;$$

$$\wp(u + \omega_2) = r^2 - \frac{1}{2}, \quad \wp'(u + \omega_2) = \pm r(2r^2 - 1);$$

$$\wp 2u = \left(\frac{r^2 - 1}{2r}\right)^2, \quad \wp' 2u = \pm \frac{r^2 - 1}{4r^3}(r^4 + 2r^2 - 1);$$

$$\wp(2u + \omega_2) = \frac{r^2(2r^2 - 1)}{(r^2 - 1)^2}, \quad \wp'(2u + \omega_2) = \pm r(r^4 + 2r^2 - 1)\frac{1 - 2r^2}{(r^2 - 1)^3}.$$

En prenant maintenant r de la forme spéciale $r = \sin\theta\cos\theta$ (avec $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$ rationnel), l'invariant g_2 est précisément égal à $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ et les formules précédentes s'appliquent au premier cas qui se pose dans l'étude générale du problème de Diophante, sous le point de vue même qui a été exposé sur des exemples numériques.

Ce même type d'équation, mais avec l'hypothèse $r = \frac{1}{2}$, contient la solution d'un problème célèbre. Ce cas ne rentre pas dans celui des équations associées au problème de DIOPHANTE, car la relation $2\sin\theta\cos\theta = 1$ exprime que l'aire de l'arithmotriangle pythagorique est carré parfait, ce qui est impossible (FERMAT). Mais alors l'équation avec $g_2 = \frac{1}{2}$, $g_3 = 0$, n'est autre que celle des *triangles pythagoriques dont l'hypoténuse est carré parfait, ainsi que la somme ou la différence des côtés de l'angle droit* et des diverses équations indéterminées qui ont été rattachées par EULER, LAGRANGE, etc., à ce problème (voir *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli*, dans l'*Enseignement mathématique* de juin 1919, t. XX, p. 245-268) [1].

FORMULES POUR $g_2 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)$, $g_3 = 0$.

5. — Un second cas à traiter est celui où g_2 est égal à

$$g_2 = \sin^4\theta + \sin^4\theta\cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad \cos^4\theta + \sin^4\cos^4\theta\ ;$$

par une transformation immédiate, il est réductible à

$$g_2 = 1 + \cos^4\theta \qquad \text{ou} \qquad 1 + \sin^4\theta\ .$$

Nous prendrons:

$$g_2 = (1 - t^2)^4 + (1 + t^2)^4 = 2(t^8 + 6t^4 + 1)\ ,$$

t est un nombre rationnel arbitraire; $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta$. Les fonctions $\wp u$ et $\wp' u$ ont été multipliées par les facteurs

$$\frac{(1 + t^2)^4}{4t^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{(1 + t^2)^6}{8t^3}\ .$$

---

[1] Je profite de l'occasion pour signaler que, sur la même question et en même temps que mon travail, paraissait un mémoire de M. Michele CIPOLLA: *I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli*, dans les *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, V^{me} série, vol. XI, mémoire XI, 1° maggio 1919.