

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA RÉOLUTION DE QUELQUES SYSTÈMES HOMOGENES
D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ
Autor: Migliari, Dr Teresa Bianca
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-20687>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On obtiendra toutes les courbes M réelles en effectuant sur ces courbes spéciales des transformations de Moebius quelconques. Partant des surfaces représentées dans le tableau, on ne peut arriver par des transformations conformes qu'à des cyclides de Dupin. D'autre part, ces transformations conservent les lignes de courbure. Nous arrivons donc au résultat suivant :

Les courbes réelles admettant un groupe de transformations de Moebius sont (à l'exception de courbes sphériques) :

dans le plan, les loxodromies d'un système linéaire de cercles ;

dans l'espace, les loxodromies des lignes de courbure des cyclides de Dupin.

Il y a peu de temps, M. Thomsen¹ a donné un exposé de la géométrie différentielle conforme. Considérées à ce point de vue, nos courbes se présentent comme des courbes ayant leurs invariants différentiels constants.

Bâle, janvier 1926.

S U R L A R É S O L U T I O N
D E Q U E L Q U E S S Y S T È M E S H O M O G È N E S D' É Q U A T I O N S
D U S E C O N D D E G R É

P A R

D^r Teresa Bianca MIGLIARI (Turin).

On connaît la méthode générale de résolution d'un système formé de deux équations homogènes du second degré à deux seules inconnues, ou de deux équations dont l'une est du premier et l'autre du second degré, etc. Au contraire, aucune méthode générale n'est connue pour la résolution des systèmes de trois équations du second degré; il existe cependant des cas où, à l'aide d'artifices convenables, on parvient à résoudre des systèmes particuliers de trois équations, à trois inconnues.

¹ *Abh. math. Seminar Hamburg* 4 (1925), p. 117.

Je crois donc qu'il n'est peut-être pas sans intérêt d'exposer ici un procédé qui nous permet de résoudre, assez facilement, un système symétrique de trois équations homogènes du second degré, d'un type plus général que ceux que l'on considère ordinairement. Ce système contient, en particulier, plusieurs systèmes d'équations déjà traités par maints auteurs et résolus par des artifices particuliers qui varient d'un système à l'autre.

1. — Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction entière, homogène du second degré, des variables x, y, z , et supposons qu'elle reste inaltérée lorsqu'on fait une permutation circulaire des variables x, y, z ; on voit alors facilement qu'elle doit être une fonction symétrique de x, y, z .

En effet, en faisant:

$$\varphi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + mxy + nxz + pyz,$$

la condition $\varphi(x, y, z) = \varphi(y, z, x)$, valable pour toute valeur de x, y, z nous amène aux relations $a = b = c$ et $m = n = p$, ce qui montre bien que la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit être symétrique par rapport aux variables x, y, z .

Etant données quatre ou plusieurs variables, on ne trouve pas la propriété analogue.

Considérons ensuite le système des trois équations du second degré:

$$\begin{cases} mx(x + y + z) + \varphi(x, y, z) = a, \\ my(x + y + z) + \varphi(y, z, x) = b, \\ mz(x + y + z) + \varphi(z, x, y) = c, \end{cases} \quad (1)$$

où a, b, c, m sont des quantités connues.

Il s'agit de résoudre ce système.

Des équations (1) on tire, par soustraction:

$$\begin{cases} m(x - y)(x + y + z) = a - b, \\ m(y - z)(x + y + z) = b - c, \\ m(z - x)(x + y + z) = c - a; \end{cases} \quad (2)$$

multiplions ces équations respectivement par z, x, y ; l'addition des produits nous donne l'équation linéaire:

$$(a - b)z + (b - c)x + (c - a)y = 0;$$

d'où l'on peut déduire, par exemple, z comme fonction linéaire et homogène de x, y et, si l'on substitue cette valeur, par exemple dans la première des relations (1) et (2), on obtient un système de deux équations du second degré entre les variables x, y ; comme ce système ne contient que des termes du second degré par rapport aux variables x, y (et pour cette raison il est appelé ordinairement système homogène), on sait le résoudre, par des procédés bien connus, et il admet quatre solutions.

Cependant ce procédé, qui n'est pas symétrique, donne lieu à des formules pour x, y, z , en général, très compliquées, qui demanderaient plusieurs calculs pour être simplifiées convenablement.

Il est donc utile de procéder autrement.

2. — Posons, pour abrégé,

$$u = \frac{1}{m(x + y + z)} \tag{3}$$

et nous pourrons écrire les équations (2) comme il suit :

$$x - y = (a - b) u, \quad y - z = (b - c) u, \quad z - x = (c - a) u,$$

d'où

$$x - au = y - bu = z - cu;$$

en appelant v la valeur commune de ces membres, on tire :

$$\begin{cases} x = au + v \\ y = bu + v \\ z = cu + v \end{cases} \tag{4}$$

et il s'agit désormais de déterminer les quantités u et v .

Des équations (4) on a :

$$x + y + z = (a + b + c) u + 3v, \tag{5}$$

et en substituant dans la (3) on trouve :

$$mu [(a + b + c) u + 3v] = 1, \tag{6}$$

qui est une première relation entre u et v .

Substituant encore les expressions (4), par exemple dans la première de (1), et ayant égard à (5), on aura un résultat de la forme :

$$m(au + v) [(a + b + c) u + 3v] + \psi(u, v) = a,$$

où $\psi(u, v)$ est une fonction entière homogène du second degré des variables u, v , dont les coefficients sont des fonctions symétriques des quantités a, b, c .

Si de cette équation on retranche (6) multipliée par a , on obtient l'équation plus simple:

$$mv[(a + b + c)u + 3v] + \psi(u, v) = 0, \quad (7)$$

qui constitue précisément la deuxième relation entre u, v .

Nous sommes ainsi parvenus à la résolution du système (6), (7), qui est composé de deux équations du second degré en u et v .

En résolvant l'équation homogène (7) par rapport à v on trouve un résultat de la forme:

$$v = (A_1 \pm \sqrt{A_2}) u, \quad (8)$$

où A_1 et A_2 sont des quantités connues, fonctions symétriques des quantités a, b, c .

Substituant dans (4) on a:

$$\begin{cases} x = (a + A_1 \pm \sqrt{A_2}) u, \\ y = (b + A_1 \pm \sqrt{A_2}) u, \\ z = (c + A_1 \pm \sqrt{A_2}) u, \end{cases} \quad (4')$$

Si l'on porte ensuite la valeur (8) dans (6) on trouve:

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{m [(a + b + c) + 3(A_1 \pm \sqrt{A_2})]}} \quad (9)$$

Ainsi nous avons quatre valeurs de u qui sont des fonctions symétriques de a, b, c ; lorsqu'on les substitue dans (4'), elles nous fournissent les quatre solutions du système proposé.

Il est utile encore de remarquer que l'équation (6) ne dépend nullement de la fonction donnée $\varphi(x, y, z)$.

3. — La fonction entière $\varphi(x, y, z)$ est symétrique et homogène du second degré; il s'en suit que sa forme plus générale est la suivante:

$$\varphi(x, y, z) = \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + xz + yz),$$

donc, par exemple la première équation du système (1) devient :

$$mx(x + y + z) + \alpha(x^2 + y^2 + z^2) + \beta(xy + xz + yz) = a.$$

où m, α, β , sont des quantités connues; et d'une manière analogue pour les autres deux équations.

Pour des valeurs particulières de m, α, β on obtient des systèmes remarquables bien connus.

Ainsi, par exemple, pour les valeurs :

$$\begin{array}{ll} m = -1, & \alpha = 1, & \beta = 2; & m = 1, & \alpha = 0, & \beta = -1, \\ m = -1, & \alpha = 1, & \beta = 0; & m = 2, & \alpha = 0, & \beta = -1, \\ m = -1, & \alpha = 1, & \beta = -1; & m = m, & \alpha = 1, & \beta = 0, \end{array}$$

on trouve respectivement les systèmes nos 762, 766, 767, 769, 770, 771 de l'intéressant ouvrage: « *Esercizi di Matematica* » de MM. BURALI-FORTI e BOGGIO (Petrini-Turin 1924) où ils sont résolus à l'aide d'artifices élégants.

Ce qui précède donne, au contraire, une méthode uniforme de résolution de ces systèmes et d'autres analogues.

L'ILLUSTRATION DU MONDE PHYSIQUE ÉTABLI PAR LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

PAR

I. OGUIEWETZKI (Ekaterinoslaw).

Pour établir la liaison entre le temps et l'espace, trouvée par G. Minkowski, considérons un monde d'une seule dimension qui se déplace dans l'espace à deux dimensions.

On peut réaliser ce déplacement à l'aide d'un écran pourvu d'une fente très mince, qui se déplace parallèlement à l'autre écran placé en arrière du premier. Nous appelons l'écran avec la fente l'écran A et l'autre écran l'écran D. Dessinons sur l'écran D une suite de courbes (une cissoïde, une astroïde, une spirale