SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS

Autor(en): **Streit, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-21251

On obtient après un calcul facile

$$R'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu} = {}^0R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - 2A^{\nu}_{\lambda} m_{[\omega\mu]} + 2A^{\nu}_{[\omega} m_{\mu]\lambda} \,, \tag{26}$$

où

$$m_{\mu\lambda} = \nabla_\mu M_\lambda - M_\mu M_\lambda - S^{\cdot\cdot\alpha}_{\mu\lambda} M_\alpha \,.$$

L'élimination de $m_{\mu\lambda}$ de l'équation (26) nous conduit à l'affineur

$${}^0R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda} - \frac{1}{n+1} A^{\nu}_{\lambda}\, {}^0V_{\omega\mu} - \frac{2}{n-1} A^{\nu}_{[\omega}\left({}^0R_{\mu]\lambda} + \frac{1}{n+1}\, {}^0V_{\mu]\lambda}\right)$$

qui est invariant par rapport aux transformations (24).

Prague, septembre 1926.

SUR LE TRIANGLE DES PIEDS DES HAUTEURS

PAR

Arnold Streit, Dr Phil. (Berne).

Introduction.

Dans les développements, nous avons surtout utilisé des procédés trigonométriques. Ceux-ci nous ont permis de découvrir un certain nombre de théorèmes et quelques relations trigonométriques.

Notations. — Nous désignerons les sommets du triangle donné par A, B, C; les côtés opposés par a, b, c; les angles correspondants par α, β, γ; les hauteurs par h', h'', h''', leurs segments supérieurs par s', s'', s''' et les segments inférieurs par i', i'', i'''; les segments déterminés par les hauteurs sur les côtés respectifs par a', a'', b', b'', c', c''; le rayon du cercle inscrit par r, celui du cercle circonscrit par R et ceux des cercles ex-inscrits par r_a, r_b, r_c; le périmètre par u et la surface par S.

Soient A_1, B_1, C_1 les sommets du triangle des pieds des hauteurs; a_1, b_1, c_1 ses côtés; α_1, β_1, γ_1 ses angles; h_1', h_1'', h_1''' ses hauteurs; r_1 et R_1 les rayons des cercles inscrit et circonscrit; u_1 son périmètre et S_1 sa surface.

Soient enfin respectivement r', r'', r''' les rayons des cercles inscrits dans les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 et R', R'', R''' ceux des cercles circonscrits (à ces triangles).

1. — Expression des éléments, du périmètre et de la surface du triangle des pieds des hauteurs en fonction des éléments du triangle donné.

A. Angles. — Les hauteurs du triangle donné sont, comme on sait, les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs (fig. 1):

$$\sphericalangle AA_1C_1 = \sphericalangle AA_1B_1 = \frac{\alpha_1}{2} .$$

Le quadrilatère ABA_1B_1 étant inscriptible, on a

$$\sphericalangle AA_1B_1 = \sphericalangle ABB_1 ,$$

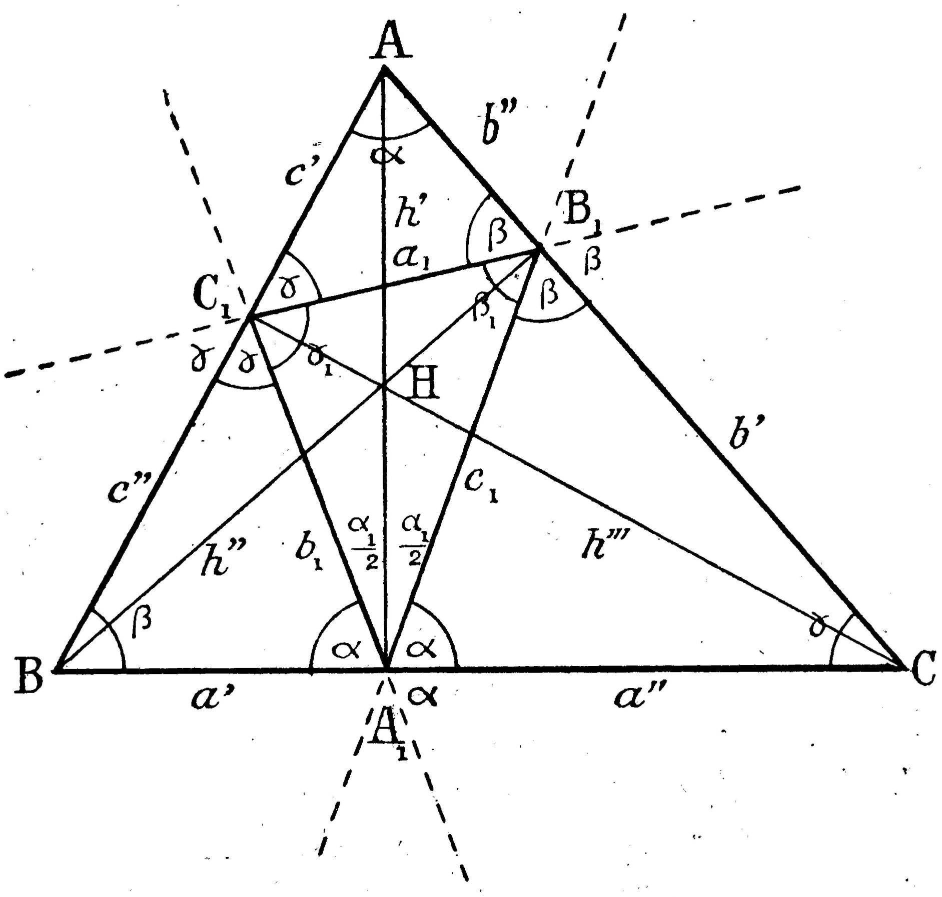

Fig. 1.

ou

$$\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ - \alpha ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = 180^\circ - 2\alpha , \\ \beta_1 = 180^\circ - 2\beta , \\ \underline{\gamma_1 = 180^\circ - 2\gamma .} \end{array}\right. \qquad (1)$$

Il en résulte

$$\left\{\begin{array}{l} \sphericalangle\, C_1A_1B = \sphericalangle\, B_1A_1C = \alpha , \\ \sphericalangle\, A_1B_1C = \sphericalangle\, C_1B_1A = \beta , \\ \sphericalangle\, B_1C_1A = \sphericalangle\, A_1C_1B = \gamma , \end{array}\right. \qquad (2)$$

c'est-à-dire :

Deux quelconques des côtés du triangle des pieds des hauteurs forment avec le côté sur lequel ils se coupent des angles égaux à l'angle compris entre les deux autres côtés du triangle donné.

Il en résulte :

1° *Les triangles aux sommets* (AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1) *sont semblables entre eux et au triangle* (ABC) *donné.*

2° *Les côtés du triangle donné sont les bissectrices des angles extérieurs du triangle des pieds des hauteurs.*

B. Côtés. — a) *Expression en fonction des côtés et des angles.*

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, ABC \text{ (fig. 1)}:$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{c'}{b} = \cos\alpha ,$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = a\cos\alpha , \\ b_1 = b\cos\beta , \\ \underline{c_1 = c\cos\gamma ,} \end{array}\right. \qquad (3)$$

c'est-à-dire

Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal au côté correspondant du triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle opposé.

b) *Expression en fonction des côtés seulement.*

De (fig. 1)

$$a_1 = a\cos\alpha$$

et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

résulte

$$\underline{a_1 = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}} . \tag{4}$$

Les expressions correspondantes de b_1 et c_1 s'obtiennent par permutation circulaire.

C. Périmètre. — En désignant par u', u'' et u''' les périmètres des triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 semblables au triangle ABC de périmètre u, nous avons (fig. 1):

$$\frac{u'}{u} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha ,$$

d'où

$$\begin{cases} u' = u \cos\alpha ; \\ u'' = u \cos\beta , \\ u''' = u \cos\gamma ; \end{cases}$$

$$u' + u'' + u''' = u . (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

ou

$$u + u_1 = u . (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) ,$$

d'où

$$u_1 = u . [\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1] .$$

En transformant la parenthèse en un produit, on trouve

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - 1 = 4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} .$$

Par suite

$$\underline{u_1 = u . \left[4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right]} , \tag{5}$$

formule calculable par logarithmes.

Mais

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R} . \tag{6}$$

Donc, en remplaçant

d'où

$$\begin{cases} \underline{u_1 = u . \dfrac{r}{R}} , \\ \underline{\dfrac{u_1}{u} = \dfrac{r}{R}} , \end{cases} \tag{7}$$

c'est-à-dire

Théorème. — *Les périmètres du triangle des pieds des hauteurs et du triangle donné sont entre eux comme les rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné.*

D. Surface. — a) *Première expression.* — Soient S′, S″, S‴ les surfaces des triangles AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1. Ces triangles étant semblables au triangle ABC de surface S, nous avons (fig. 1):

$$\frac{S'}{S} = \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{a^2} = \cos^2 \alpha \ .$$

Par suite

$$\begin{aligned} S' &= S \cos^2 \alpha \ , \\ S'' &= S \cos^2 \beta \ , \\ S''' &= S \cos^2 \gamma \ ; \end{aligned}$$

$$S' + S'' + S''' = S \, . \, (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \ ,$$

ou

$$S - S_1 = S \, . \, (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) \ ,$$

d'où

$$S_1 = S \, . \, [1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)] \ . \qquad (8)$$

Mais

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{R - r_1}{R} \ . \qquad (9)$$

On a donc

$$\left\{ \begin{aligned} &\underline{S_1 = S \, . \, \frac{r_1}{R} \ ,} \\ &\underline{\frac{S_1}{S} = \frac{r_1}{R} \ ,} \end{aligned} \right. \qquad (10)$$

c'est-à-dire

Théorème. — *La surface du triangle des pieds des hauteurs est à la surface du triangle donné comme le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs est au rayon du cercle circonscrit au triangle donné.*

b) *Seconde expression.*

$$2S_1 = a_1 b_1 \sin \gamma_1 \qquad \text{(fig. 1)}$$

Mais

$$a_1 = a \cos \alpha \ , \qquad b_1 = b \cos \beta \ , \qquad \gamma_1 = 180 - 2\gamma \ ;$$

$$2S_1 = a \cos \alpha \, . \, b \cos \beta \, . \, \sin (2\gamma) \ ,$$

$$\sin (2\gamma) = 2 \sin \gamma \cos \gamma \ .$$

Par suite

$$S_1 = (ab \sin \gamma) \, . \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

ou

$$\underline{S_1 = 2S \, . (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)} \; . \qquad (11)$$

Remarques. — 1. Des formules (8) et (11) résulte

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1 \; , \qquad (12)$$

ce qui est la *relation des cosinus.*

2. De (11) on tire

$$\underline{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{S_1}{2S}} \; . \qquad (13)$$

E. Rayon du cercle circonscrit (fig. 1). — Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs n'étant autre que le cercle des neuf points, on a

$$\underline{R_1 = \frac{R}{2}} \; , \qquad (14)$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs est égal à la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

F. Rayon du cercle inscrit. — a) *Expression en fonction des angles et de* R (fig. 2).

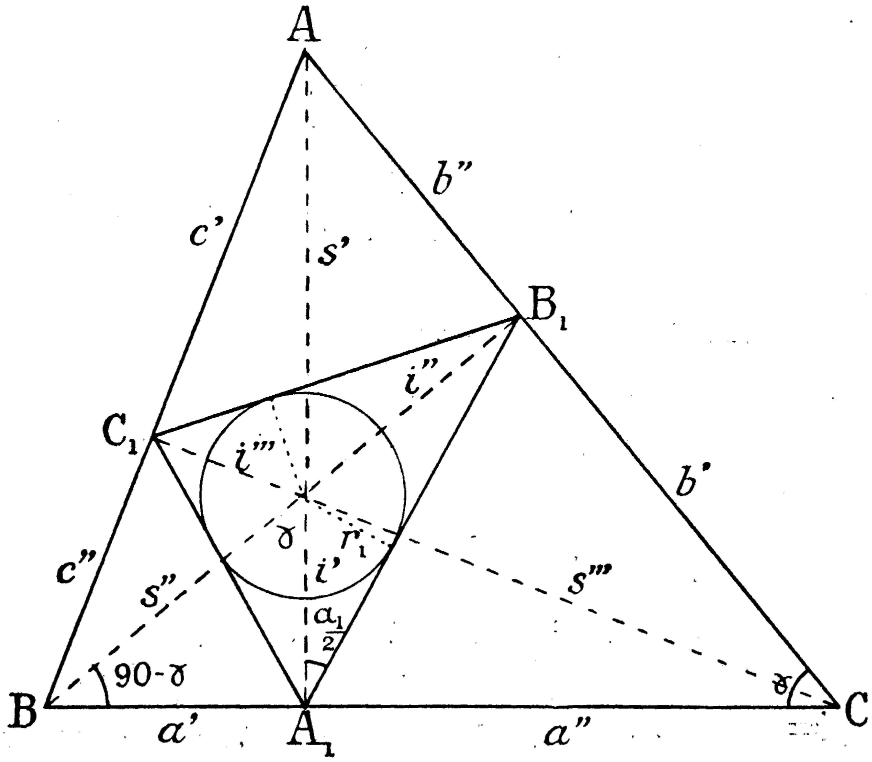

Fig. 2.

$$r_1 = i' \sin \frac{\alpha_1}{2} \; .$$

Or

$$i' = a' \operatorname{tg}(90 - \gamma) = c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma$$

et

$$\sin\frac{\alpha_1}{2} = \sin(90 - \alpha) = \cos\alpha .$$

Donc

$$r_1 = (c \cos\beta \operatorname{cotg}\gamma)\cos\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha ,$$

ou

$$\underline{r_1 = 2\mathrm{R}(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma) .} \tag{15}$$

Remarque. — De (15) résulte

$$\underline{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2\mathrm{R}} .} \tag{16}$$

b) *Expression en fonction des côtés et de* R. *(Somme des carrés des côtés d'un triangle).*

1° Le rayon r du cercle inscrit dans un triangle ABC étant donné par la formule

$$r = (p - a) . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} ,$$

nous avons pour le rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs (fig. 2):

$$r_1 = (p_1 - a_1) . \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{2} - a_1\right) . \operatorname{cotg}\alpha ,$$

ou

$$r_1 = \left[\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{2} - a . \cos\alpha\right] . \operatorname{cotg}\alpha .$$

Mais

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a + b + c} = \frac{r}{\mathrm{R}} . \tag{17}$$

Par suite

$$r_1 = \left[\frac{a + b + c}{2} . \frac{r}{\mathrm{R}} - a\cos\alpha\right] . \operatorname{cotg}\alpha =$$

$$= p . \frac{r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\alpha - \frac{a}{\sin\alpha} . \cos^2\alpha ;$$

$$\left\{\begin{aligned} r_1 &= \frac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\alpha - 2\mathrm{R} . \cos^2\alpha , \\ r_1 &= \frac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\beta - 2\mathrm{R} . \cos^2\beta , \\ r_1 &= \frac{p . r}{\mathrm{R}} . \operatorname{cotg}\gamma - 2\mathrm{R} . \cos^2\gamma , \end{aligned}\right.$$

d'où

$$3r_1 = \frac{p \cdot r}{R} \cdot \left[\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \beta + \text{cotg}\ \gamma\right] - 2R\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) .$$

Or on trouve facilement

$$\text{cotg}\ \alpha + \text{cotg}\ \beta + \text{cotg}\ \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} . \qquad (18)$$

Remplaçons:

$$3r_1 = \frac{S}{R} \cdot \left[\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}\right] - 2R(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) .$$

Mais (9)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{R - r_1}{R} .$$

Donc

$$3r_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2(R - r_1) ,$$

d'où

$$\underline{r_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R} - 2R} . \qquad (19)$$

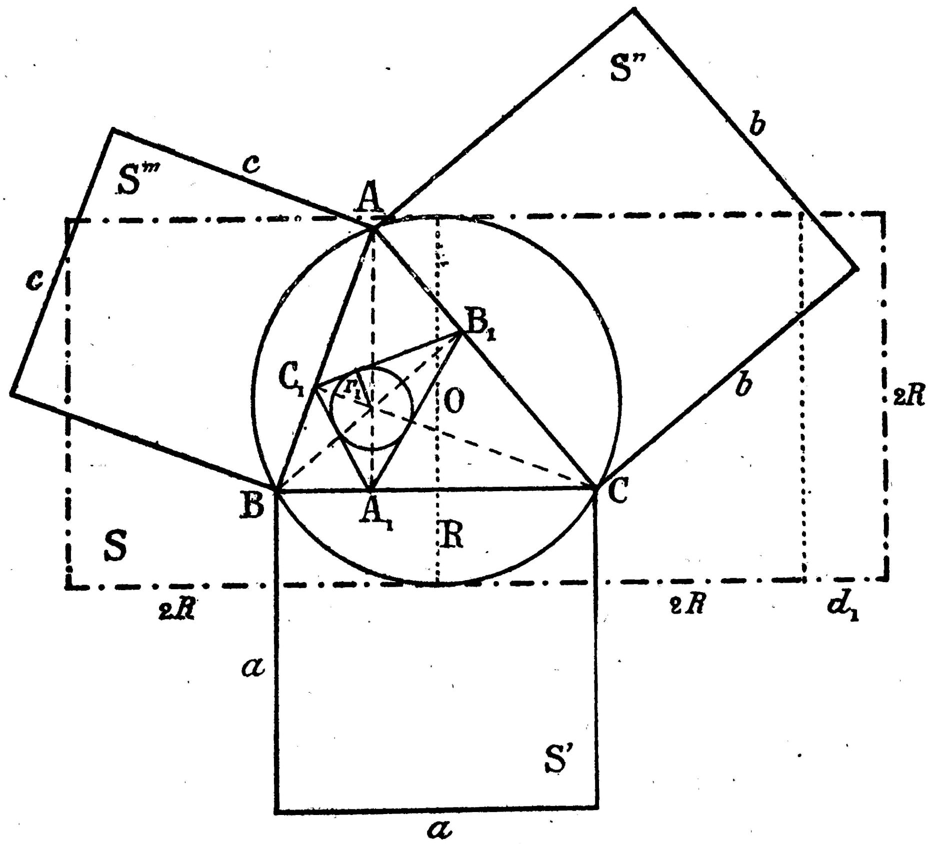

Fig. 3.

2º *(Conséquence).* — La formule obtenue pour r_1 conduit à une expression pour la *somme des carrés* des côtés du triangle donné. Il en résulte:

$$4Rr_1 = (a^2 + b^2 + c^2) - 8R^2$$

d'où

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 + 4Rr_1 = 4R^2 + 4R^2 + 2R \cdot 2r_1 ,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (2R)^2 + (2R)^2 + 2R \cdot 2r_1 ,$$

ou

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 = D^2 + D^2 + D \cdot d_1 = D \cdot (2D + d_1) ,} \qquad (20)$$

ou (fig. 3) (20)′ $S' + S'' + S''' = S$, c'est-à-dire

Théorème. — *La somme des carrés des côtés d'un triangle acutangle est égale à un rectangle ayant pour base le diamètre du cercle circonscrit et pour hauteur le double diamètre de ce cercle augmenté du diamètre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

Remarque. — Appliqué au triangle rectangle ($\alpha = 90°$), ce théorème conduit au théorème de Pythagore:

$$a^2 = b^2 + c^2 ,$$

car $D = a$ et $d_1 = 0$ ($S = 2S'$, $S'' + S''' = S'$).

G. Rayons des cercles ex-inscrits. — *Expression de la surface d'un triangle en fonction de* r, R *et* r_1. — La hauteur, issue de A, du triangle AB_1C_1 est le rayon r_{a1} du cercle ex-inscrit au triangle des pieds des hauteurs, tangent à a_1 (fig. 4). Or

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, ABC:$$

$$\frac{r_{a_1}}{h'} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha .$$

Mais

$$r_{a_1} = h' \cdot \cos\alpha \; ; \qquad h' = b \sin\gamma ,$$

$$b = 2R \sin\beta , \qquad h' = 2R \sin\beta \sin\gamma \; ;$$

$$\left\{ \begin{aligned} r_{a_1} &= 2R \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma , \\ r_{b_1} &= 2R \cos\beta \sin\gamma \sin\alpha , \\ r_{c_1} &= 2R \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta . \end{aligned} \right. \qquad (21)$$

Conséquences. — De ces formules résulte (fig. 4):

1o

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = 8R^3(\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma)(\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)^2 ,$$

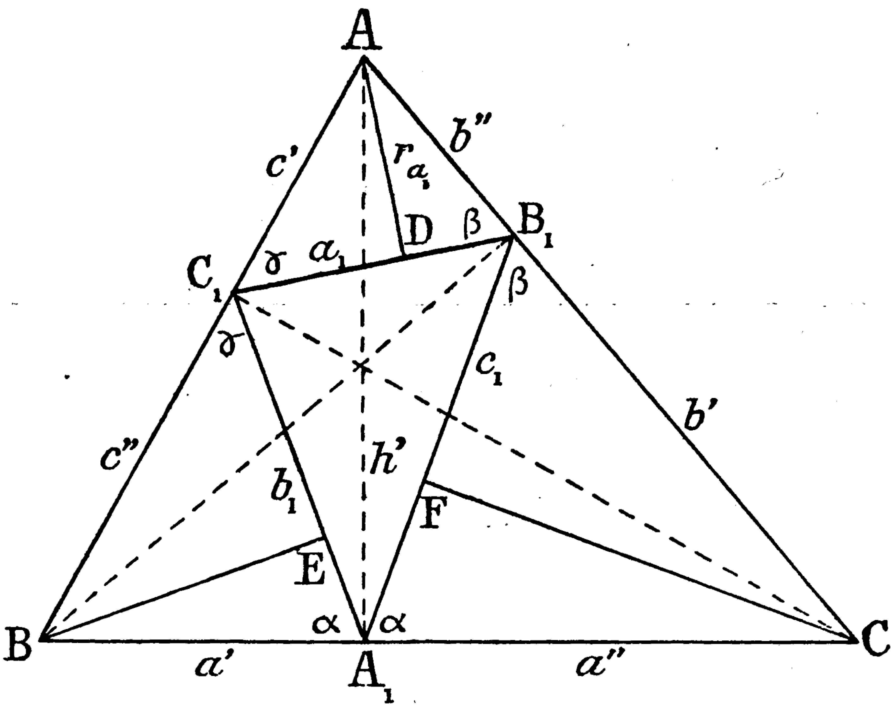

Fig. 4.

Mais (13)

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{S_1}{2S}$$

et

$$\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{S}{2R^2} . \tag{22}$$

Par suite

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = \frac{S_1 S}{R} , \quad \underline{D_1 \cdot r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = S_1 \cdot S} . \tag{23}$$

Or (10)

$$S_1 : S = r_1 : R , \qquad \text{d'où } R = \frac{r_1 S}{S_1} .$$

Donc

$$r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = \frac{S_1^2}{r_1} ,$$

d'où

$$\Delta\ A_1 B_1 C_1 \ldots\ r_1 \cdot r_{a_1} \cdot r_{b_1} \cdot r_{c_1} = S_1^2$$

$$\Delta\ ABC \ldots\ \underline{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = S^2} \tag{23'}$$

On retrouve ainsi une relation connue.

2°

$$r_{a_1} = 4R_1 \,.\, \cos\left(90 - \frac{\alpha_1}{2}\right) \sin\left(90 - \frac{\beta_1}{2}\right) \sin\left(90 - \frac{\gamma_1}{2}\right) ,$$

$$r_{a_1} = 4R_1 \sin\frac{\alpha_1}{2} \cos\frac{\beta_1}{2} \cos\frac{\gamma_1}{2} .$$

Donc

$$r_a = 4R \,.\, \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} .$$

Par suite

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = 64R^3 \left(\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 =$$

$$= 64R^3 \cdot \frac{r}{4R} \cdot \frac{(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2}{16} .$$

Or, de

$$h' + h'' + h''' = 2R[\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha] \qquad (24)$$

et

$$h' + h'' + h''' = 2R + 4r + r_1 + \frac{r^2}{R} \text{ [1]} \qquad (25)$$

résulte

$$\sin\alpha \sin\beta + \sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha = \frac{r^2 + 2R^2 + 4rR + r_1 R}{2R^2} , \qquad (26)$$

et de (9)

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + \frac{r_1}{R} . \qquad (27)$$

Si l'on se base sur (26) et (27), la relation ci-dessus peut s'écrire

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c = R^2 \,.\, r\left[\left(2 + \frac{r_1}{R}\right) + \frac{r^2 + 2R^2 + 4rR + r_1 R}{R^2}\right] =$$

$$= r \,.\, [r^2 + 4R^2 + 4rR + 2r_1 R] =$$

$$= r \,.\, [(r + 2R)^2 + 2r_1 R] ,$$

ou, en posant $2R = D$

$$\underline{r_a \cdot r_b \cdot r_c = r \,.\, [(r + D)^2 + r_1 D] .} \qquad (28)$$

De (23) et (28) résulte

$$\underline{S^2 = r^2 \,.\, [(r + D)^2 + r_1 D] .} \qquad (29)$$

[1] Arnold Streit: « Sur les hauteurs d'un triangle », *Enseignement Mathématique*, sept. 1926 (p. 44, formule 20).

Cette formule exprime la surface d'un triangle en fonction du rayon du cercle inscrit, du diamètre du cercle circonscrit et du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.

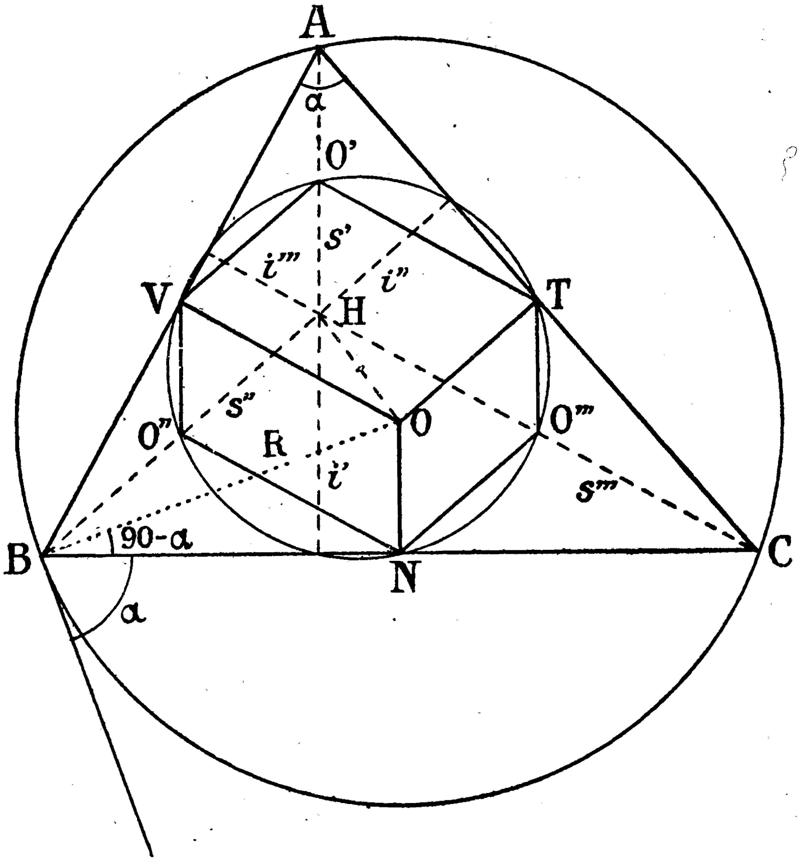

Fig. 5.

2. — Distances du centre du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés de ce triangle.

La figure (5) donne

$$ON = R \cos \alpha = \frac{s'}{2} ,$$

$$OT = R \cos \beta = \frac{s''}{2} ,$$

$$OV = R \cos \gamma = \frac{s'''}{2} ;$$

$$ON + OT + OV = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) .^{1} \qquad (30)$$

[1] *Op. cité*, p. 42 (formule 11).

Donc

$$\underline{\mathrm{ON} + \mathrm{OT} + \mathrm{OV} = r + \mathrm{R}}\ , \tag{31}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle aux côtés du triangle est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit.*

Conséquence. — Il en résulte que le périmètre de l'hexagone O′ VO″ NO‴ T est égal à $2(r + \mathrm{R})$.

3. — Triangles aux sommets.

A. CERCLES INSCRITS. — Les triangles aux sommets AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 étant semblables au triangle ABC donné, nous avons (fig. 1):

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad \frac{r'}{r} = \frac{a_1}{a} = \cos\alpha\ ,$$

d'où

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad r' = r\cos\alpha\ ,$$

$$\Delta\ BC_1A_1 \ldots \qquad r'' = r\cos\beta\ ,$$

$$\Delta\ CA_1B_1 \ldots \qquad r''' = r\cos\gamma\ ,$$

c'est-à-dire

Le rayon du cercle inscrit dans l'un quelconque des triangles aux sommets est égal au rayon du cercle inscrit dans le triangle donné multiplié par le cosinus de l'angle commun.

Par suite

$$r' + r'' + r''' = r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\ .$$

Or

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{r + \mathrm{R}}{\mathrm{R}}\ . \tag{32}$$

Donc

$$\underline{r' + r'' + r''' = r + \frac{r^2}{\mathrm{R}}}\ . \tag{33}$$

En outre

$$r'r''r''' = r^3(\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)\ .$$

Mais (16)

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{r_1}{2\mathrm{R}}\ .$$

Donc

$$r'r''r''' = \frac{r_1 r^3}{2R} ,$$

d'où

$$\underline{Dr'r''r''' = r_1 r^3 .} \qquad (34)$$

B. Cercles circonscrits. — Les angles HB_1A et HC_1A étant droits, AH (c'est-à-dire s') est le diamètre du cercle circonscrit au triangle AB_1C_1 (fig. 1 et 12):

$$2R' = s' = 2R\cos\alpha ,$$

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \quad R' = \frac{s'}{2} = R\cos\alpha ,$$

$$\Delta\ BC_1A_1 \ldots \quad R'' = \frac{s''}{2} = R\cos\beta ,$$

$$\Delta\ CA_1B_1 \ldots \quad R''' = \frac{s'''}{2} = R\cos\gamma .$$

Par suite

$$R' + R'' + R''' = \frac{1}{2}(s' + s'' + s''') .$$

Or (30)

$$s' + s'' + s''' = 2(r + R) .$$

Donc

$$\underline{R' + R'' + R''' = r + R ,} \qquad (35)$$

c'est-à-dire

La somme des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle donné.

En outre

$$2R' . 2R'' . 2R''' = s's''s''' .$$

Mais [1]

$$s's''s''' = r_1 D^2 . \qquad (36)$$

Donc

$$D' . D'' . D''' = r_1 D^2 = d_1 . D_1 . D ,$$

d'où

$$\underline{R' . R'' . R''' = r_1 . R_1 . R ,} \qquad (37)$$

c'est-à-dire

[1] *Op. cité*, formule 22, p. 44.

Le produit des rayons des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est égal au produit des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle des pieds des hauteurs par le rayon du cercle circonscrit au triangle donné.

C. Distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets aux côtés du triangle des pieds des hauteurs. — Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné. On a (fig. 6 et 12):

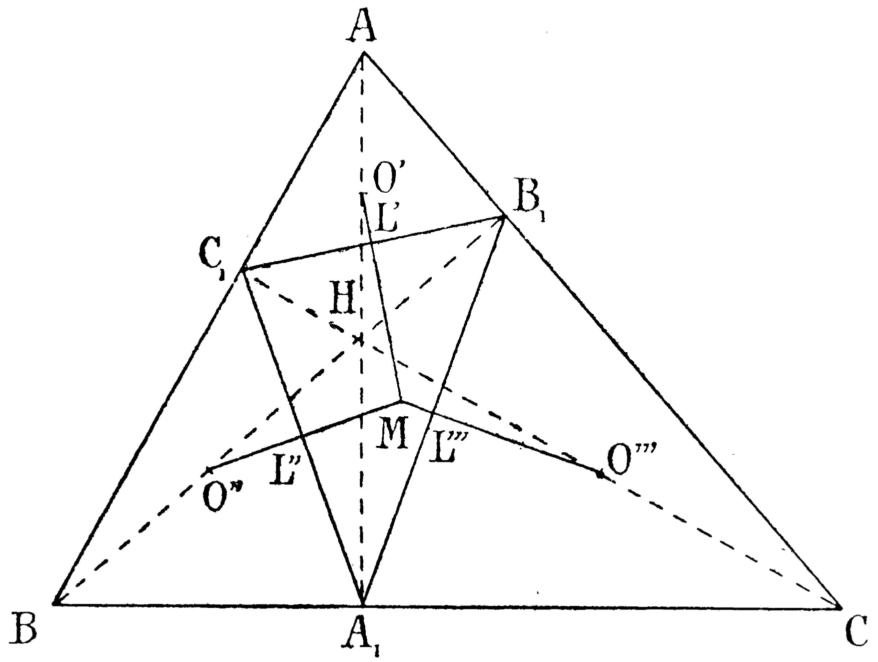

Fig. 6.

$$O'L' + O''L'' + O'''L''' = (O'M + O''M + O'''M) - (ML' + ML'' + ML''').$$

Or, M étant le centre du cercle circonscrit au triangle $A_1 B_1 C_1$ et ML', ML'', ML''' ses distances aux côtés de ce triangle, on a, en vertu de (31)

$$ML' + ML'' + ML''' = R_1 + r_1 .$$

En outre

$$O'M + O''M + O'''M = 3R_1 .$$

Remplaçons ci-dessus:

$$\underline{O'L' + O''L'' + O'''L''' = 2R_1 - r_1 = R - r_1} , \qquad (38)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets, — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné, — aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

La relation ci-dessus peut aussi être interprétée comme suit (fig. 6 et 12):

Si du centre (M) *du cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *on abaisse les perpendiculaires sur les côtés, la somme des segments compris entre les côtés et la circonférence (circonscrite) est égale à la différence entre le diamètre du cercle circonscrit et le rayon du cercle inscrit.*

4. — Somme des distances des sommets du triangle donné aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs. (Somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle.)

La figure (4) donne:

$$\left.\begin{aligned} AD &= c' \sin\gamma \\ BE &= c'' \sin\gamma \end{aligned}\right\} \quad AD + BE = c\sin\gamma\,,$$

$$\left.\begin{aligned} BE &= a' \sin\alpha \\ CF &= a'' \sin\alpha \end{aligned}\right\} \quad BE + CF = a\sin\alpha\,,$$

$$\left.\begin{aligned} CF &= b' \sin\beta \\ AD &= b'' \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad CF + AD = b\sin\beta\,,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$2(AD + BE + CF) = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma\,.$$

Le second membre peut s'exprimer en fonction des rayons R et r_1:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R\,,\quad a = 2R\sin\alpha\,,\quad b = 2R\sin\beta\,,\quad c = 2R\sin\gamma\,;$$

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = 2R[\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma]\,.$$

Or, d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1) . \qquad (39)$$

Par suite

$$\underline{AD + BE + CF = 2R + r_1 ,} \qquad (40)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle donné augmenté du rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

A, B, C étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs et AD, BE, CF leurs rayons, la relation ci-dessus peut s'écrire ($R = 2R_1$):

$$r_{a_1} + r_{b_1} + r_{c_1} = 4R_1 + r_1 ; \qquad (40')$$

$$\underline{r_a + r_b + r_c = 4R + r .} \qquad (41)$$

Cette relation lie les rayons des cercles inscrit, circonscrit et ex-inscrits à un triangle. Elle peut s'énoncer comme suit:

THÉORÈME. — *La somme des rayons des cercles ex-inscrits à un triangle est égale au double diamètre du cercle circonscrit augmenté du rayon du cercle inscrit.*

5. — Distances du centre O du cercle circonscrit au triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs.

La fig. 7 (ou 12) donne:

$$OD + OE + OF = (OA + OB + OC) - (AD + BE + CF) .$$

Mais d'après (40)

$$AD + BE + CF = 2R + r_1 ,$$

et

$$OA + OB + OC = 3R .$$

Donc

$$OD + OE + OF = R - r_1 = 2R_1 - r_1 , \qquad (42)$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la différence entre le rayon du cercle circonscrit au triangle donné et le rayon du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

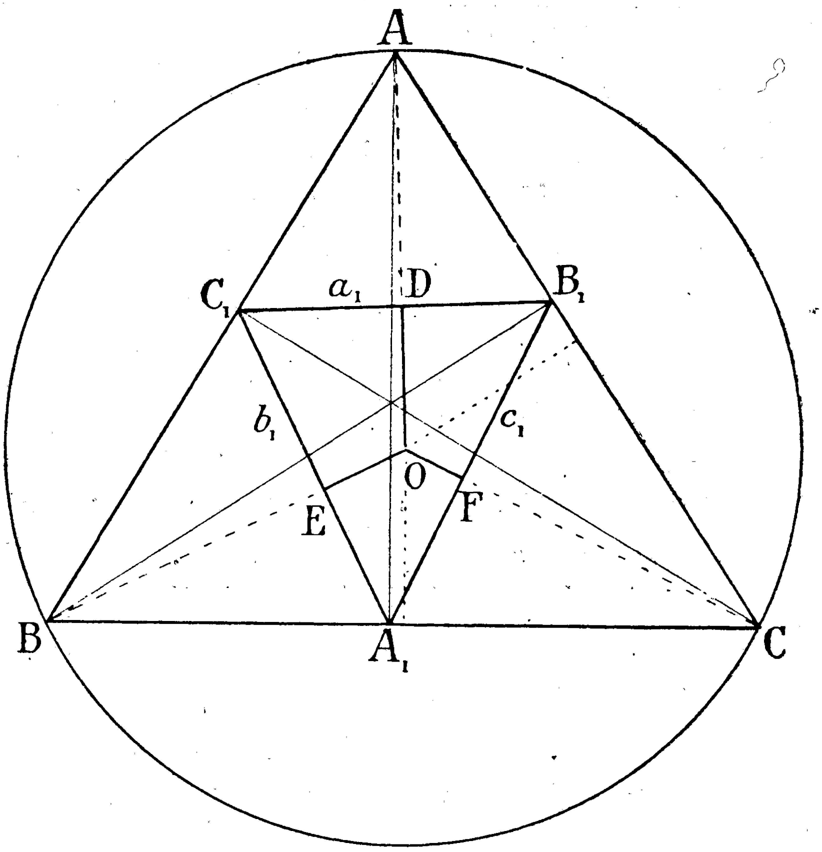

Fig. 7.

Des relations (38) et (42) résulte (fig. 12):

$$\underline{OD + OE + OF = O'L' + O'' L'' + O''' L''' (= R - r_1)}\ , \quad (43)$$

c'est-à-dire

La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle donné aux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme des distances des centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets — points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné — aux côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs.

6. — Somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs.

D'après le *théorème du cosinus*, on a (fig. 8):

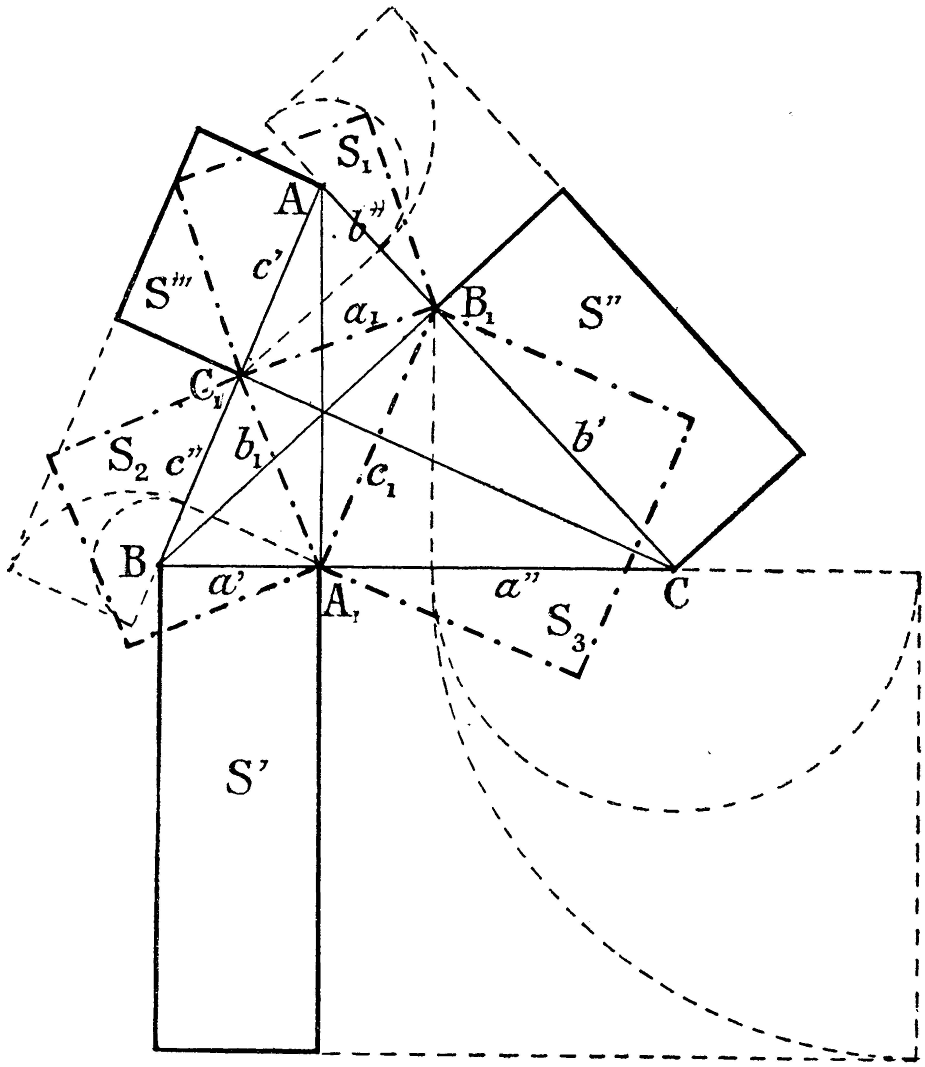

Fig. 8.

$$\Delta\ AB_1C_1 \ldots \qquad a_1^2 = b''^2 + c'^2 - 2b''c' \cos\alpha\ ,$$

$$\Delta\ BC_1A_1 \ldots \qquad b_1^2 = c''^2 + a'^2 - 2c''a' \cos\beta\ ,$$

$$\Delta\ CA_1B_1 \ldots \qquad c_1^2 = a''^2 + b'^2 - 2a''b' \cos\gamma\ ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = (a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2)$$
$$- 2 \,.\, [b''c' \cos\alpha + c''a' \cos\beta + a''b' \cos\gamma]\ .$$

Or

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2 \,.$$[1] (44)

Par suite

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2(a'^2 + b'^2 + c'^2) - 2[b''c' \cos\alpha + c''a' \cos\beta + a''b' \cos\gamma] =$$
$$= 2[(a'^2 - c''a' \cos\beta) + (b'^2 - a''b' \cos\gamma) + (c'^2 - b''c' \cos\alpha)] \,.$$

Mais

$$\cos\beta = \frac{a'}{c}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{b'}{a}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{c'}{b}\,;$$

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2 \,.\left[\left(a'^2 \cos\beta \frac{c}{a'} - c''a' \cos\beta\right) + \left(b'^2 \cos\gamma \frac{a}{b'} - a''b' \cos\gamma\right) + \right.$$
$$\left. + \left(c'^2 \cos\alpha \frac{b}{c'} - b''c' \cos\alpha\right)\right] =$$
$$= 2 \,.\, [\cos\beta(a'c - a'c'') + \cos\gamma(b'a - b'a'') + \cos\alpha(c'b - c'b'')] =$$
$$= 2 \,.\, [\cos\beta\, a'(c - c'') + \cos\gamma\, b'(a - a'') + \cos\alpha\, c'(b - b'')] =$$
$$= 2 \,.\, [\cos\beta \,.\, a'c' + \cos\gamma \,.\, b'a' + \cos\alpha \,.\, c'b'] \;;$$
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2a'(b' \cos\gamma) + 2b'(c' \cos\alpha) + 2c'(a' \cos\beta) \,,$$
$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a'(2b' \cos\gamma) + b'(2c' \cos\alpha) + c'(2a' \cos\beta)} \,, \qquad (45)$$

ou

$$S_1 + S_2 + S_3 = S' + S'' + S''' \,. \qquad (45')$$

Si l'on remplace, dans le cours des transformations, $(a'^2 + b'^2 + c'^2)$ par $(a''^2 + b''^2 + c''^2)$ et si l'on prend:

$$\cos\beta = \frac{c''}{a}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{a''}{b}\,, \qquad \cos\alpha = \frac{b''}{c}\,,$$

on est conduit au résultat suivant:

$$\underline{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a''(2b'' \cos\gamma) + b''(2c'' \cos\alpha) + c''(2a'' \cos\beta)} \,. \qquad (46)$$

Les deux relations (45) et (46) donnent lieu au théorème suivant:

THÉORÈME. — *La somme des carrés construits sur les côtés du triangle des pieds des hauteurs est égale à la somme de trois rectangles dont les bases sont trois segments non consécutifs du triangle donné et les hauteurs les doubles projections sur ceux-ci des segments non consécutifs suivants respectifs.*

---

[1] *Op. cité*, p. 32 (formule 4).

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue:

$$h'^2 = a' . a'' .$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1° *Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.*

En effet (fig. 9):

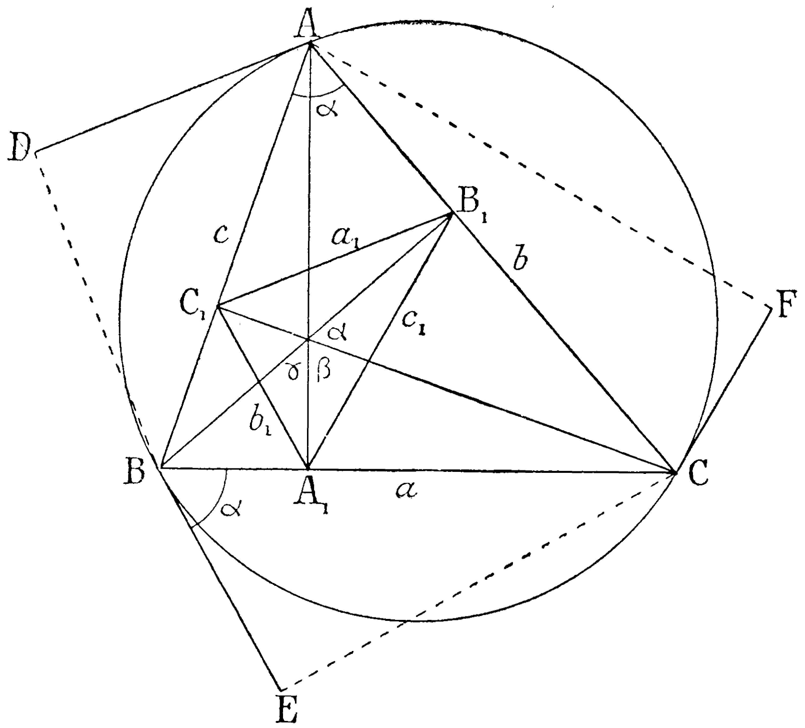

Fig. 9.

$$\begin{cases} BE = a \cos \alpha = a_1 , \\ CF = b \cos \beta = b_1 , \\ AD = c \cos \gamma = c_1 . \end{cases} \qquad (47)$$

2° *La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.*

Car on a, en désignant par GD la projection de a sur la tangente en A (fig. 10):

$$\mathrm{GD} = \mathrm{GA} + \mathrm{AD} = b \cos \beta + c \cos \gamma \ ,$$

ou

$$\left\{ \begin{aligned} \mathrm{GD} &= b_1 + c_1 \ , \\ \mathrm{KE} &= c_1 + a_1 \ , \\ \mathrm{LF} &= a_1 + b_1 \ . \end{aligned} \right. \tag{48}$$

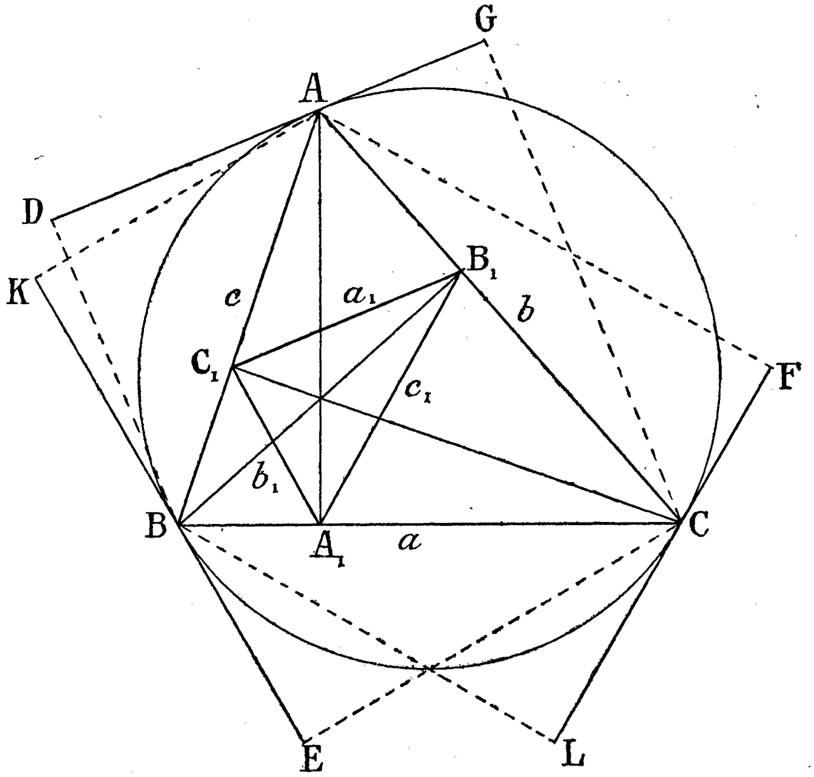

Fig. 10.

3° *Si l'on projette chaque côté du triangle donné sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au double périmètre du triangle des pieds des hauteurs* (fig. 10).

En additionnant membre à membre les trois égalités ci-dessus, on obtient en effet:

$$\mathrm{GD} + \mathrm{KE} + \mathrm{LF} = 2u_1 \ . \tag{49}$$

4° *Si l'on projette chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au périmètre du triangle multiplié par le rapport du diamètre du cercle inscrit au rayon du cercle circonscrit* (fig. 10).

Car la relation précédente peut s'écrire:

$$GD + KE + LF = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 2(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) .$$

Mais

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} = \frac{r}{R} . \tag{50}$$

Par suite

$$\underline{GD + KE + LF = (a + b + c) \frac{2r}{R} = u . \frac{2r}{R}} . \tag{51}$$

5° *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet suivant, la somme des trois perpendiculaires est égale à la somme des diamètres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs* (fig. 10).

Démonstration.

$$AF = b \sin \beta , \qquad CE = a \sin \alpha , \qquad BD = c \sin \gamma ;$$

$$AF + CE + BD = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma .$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R , \qquad a = 2R \sin \alpha , \qquad b = 2R \sin \beta , \qquad c = 2R \sin \gamma ;$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R [\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma] .$$

Or d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$\underline{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1)} \tag{52}$$

et

$$\underline{AF + CE + BD = 2(2R + r_1)} , \tag{53}$$

ou, en vertu de (40′)

$$\underline{AF + CE + BD = d_{a_1} + d_{b_1} + d_{c_1}} . \tag{53'}$$

6° *La somme des projections des deux segments d'un côté du triangle donné sur les côtés adjacents du triangle des pieds des hauteurs est égale au troisième côté de ce dernier triangle.*

En effet (fig. 4):

$$A_1E = a' \cos\alpha \ , \qquad A_1F = a'' \cos\alpha \ ,$$

$$A_1E + A_1F = (a' + a'') \cos\alpha = a \cos\alpha = a_1 \ ;$$

$$\underline{A_1E + A_1F = a_1} \ , \quad \underline{B_1F + B_1D = b_1} \ , \quad \underline{C_1D + C_1E = c_1} \ . \qquad (54)$$

Remarque. — D'après les formules (55), on aurait d'emblée:

$$A_1E = B_1D \ , \quad A_1F = C_1D \ ; \quad \text{donc} \quad A_1E + A_1F = a_1 \ .$$

7° *a*) On a (fig. 1):

$$a' = c \cos\beta \ ,$$

$$a' \cos\alpha = (c \cos\alpha) \cos\beta \ ,$$

$$\left\{\begin{aligned} a' \cos\alpha &= b'' \cos\beta \\ b' \cos\beta &= c'' \cos\gamma \\ c' \cos\gamma &= a'' \cos\alpha \end{aligned}\right. \quad \begin{matrix} \text{ou} \\ \text{»} \\ \text{»} \end{matrix} \quad \left\{\begin{aligned} A_1E &= B_1D \ , \\ B_1F &= C_1E \ , \\ C_1D &= A_1F \ , \end{aligned}\right. \qquad (55)$$

d'où

$$a' \cos\alpha + b' \cos\beta + c' \cos\gamma = a'' \cos\alpha + b'' \cos\beta + c'' \cos\gamma = \frac{u_1}{2} \ , \quad (56)$$

c'est-à-dire

Si l'on projette les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les hauteurs correspondantes sur les tangentes menées par les sommets respectifs au cercle circonscrit, les sommes des projections de trois segments non-consécutifs sont égales et ont pour valeur la moitié du périmètre du triangle des pieds des hauteurs.

De la relation précédente résulte

$$\underline{(a' - a'') \cos\alpha + (b' - b'') \cos\beta + (c' - c'') \cos\gamma = 0} \ . \qquad (57)$$

b) Exprimons et comparons les segments B_1D et C_1X (fig. 11):

$$B_1D = b'' \cos\beta \ ,$$

$$C_1X = i''' \cos(90 - \gamma) = i''' \sin\gamma \ .$$

Or

$$i''' = s' \cos\beta = \frac{b''}{\sin\gamma} \cdot \cos\beta \ .$$

Remplaçons

$$C_1X = b'' \cos \beta \ .$$

Par suite

$$\underline{B_1D = C_1X} \ , \qquad \underline{C_1Y = A_1E} \ , \qquad \underline{A_1Z = B_1F} \ . \qquad (58)$$

On retrouve ainsi le *théorème connu* suivant:

Chaque côté d'un triangle est divisé par les points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit en trois segments dont les deux extrêmes sont égaux.

c) *Distances des points de contact des cercles inscrits et ex-inscrits* (fig. 11).

Soit $b_1 < a_1 < c_1$. En tenant compte des relations (55) et (58), on a:

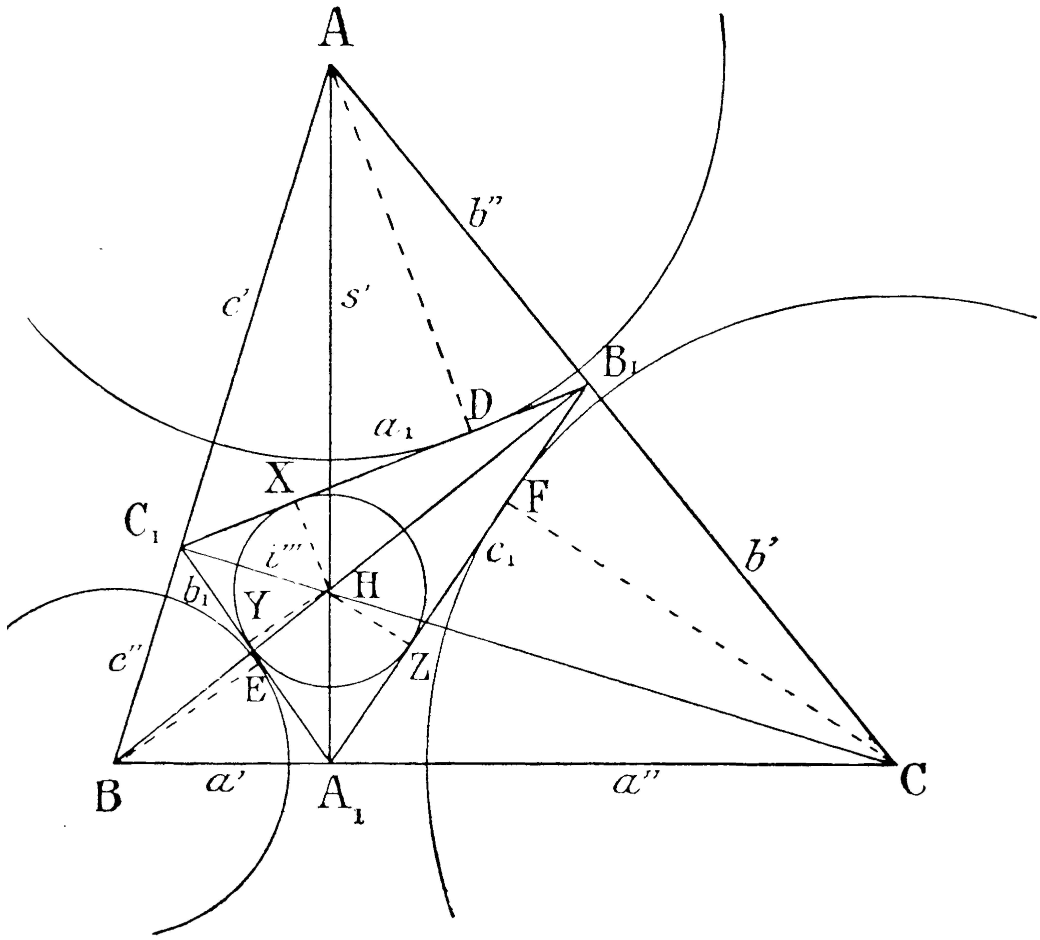

Fig. 11.

$$XD = C_1D - C_1X = A_1F - C_1Y = A_1F - A_1E =$$
$$= (A_1F + FB_1) - (A_1E + EC_1) = c_1 - b_1 \ ;$$

$$\underline{XD = c_1 - b_1} \ , \qquad \underline{YE = c_1 - a_1} \ , \qquad \underline{ZF = a_1 - b_1} \ , \qquad (59)$$

c'est-à-dire

Théorème. — *Sur chaque côté d'un triangle, la distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit est égale à la différence des deux autres côtés.*

Relation entre ces trois distances.

$$YE + ZF = c_1 - b_1 .$$

Donc

$$\underline{XD = YE + ZF} , \qquad (60)$$

c'est-à-dire

Théorème. — *La distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit sur le côté moyen d'un triangle est égale à la somme de leurs distances sur les deux autres côtés.*

8. — Autres propriétés (fig. 12).

1° Les hauteurs d'un triangle étant les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs, leur point d'intersection H est le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle. En outre, les angles B_1 et C_1 du quadrilatère $AB_1\,HC_1$ par exemple étant droits, ce quadrilatère est inscriptible. Donc:

Les cercles circonscrits aux triangles aux sommets passent par l'orthocentre H *du triangle donné, c'est-à-dire par le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs*[1].

2° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné.*

Car les segments supérieurs des hauteurs sont les diamètres de ces cercles.

3° Les pieds des hauteurs d'un triangle, les points milieu des côtés et les points milieu des segments supérieurs des hauteurs sont situés, comme on sait, sur un même cercle appelé « *cercle des neuf points* ». Ce dernier n'est donc autre que le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs. Par suite:

Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets.

---

[1] Si le triangle donné est obtusangle (par exemple ACH, fig. 11), l'orthocentre (B) est alors le centre d'un des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1B_1C_1$) correspondant.

4° *Les côtés du triangle des centres* (O′ O″ O‴) *des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont parallèles aux côtés du triangle donné et divisent les segments inférieurs des hauteurs en deux parties égales.*

En effet, la ligne des centres O′ O″ est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune HC_1 ou i'''.

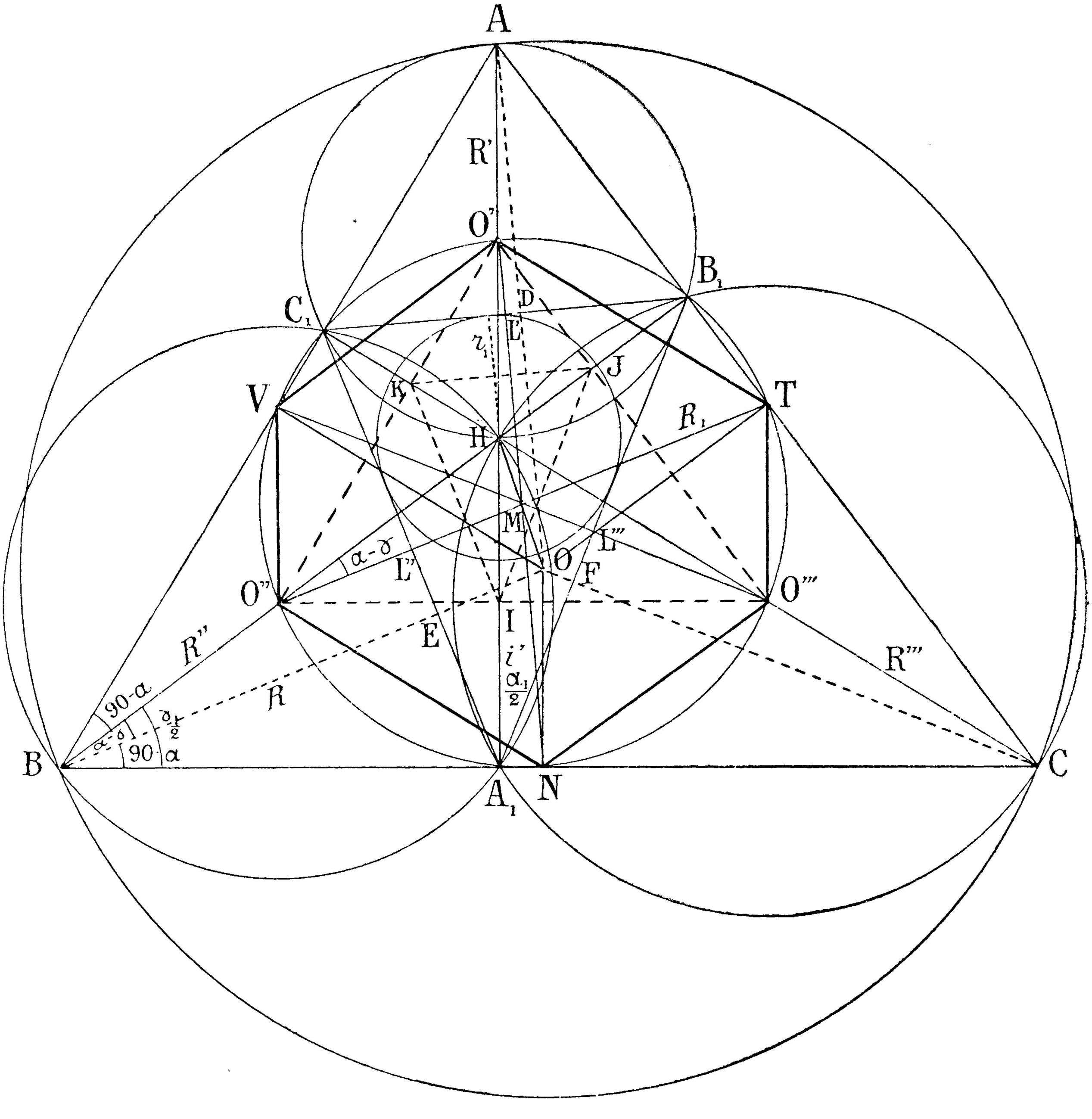

Fig. 12.

5° *Le centre radical des cercles circonscrits aux triangles aux sommets est l'orthocentre* H *du triangle donné, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs.*

Car H est le point d'intersection des cordes communes A_1 H, B_1 H et C_1 H, axes radicaux des trois cercles.

6° *Les sommets du triangle donné sont les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs.*

Soit en effet $A_1 S$ le prolongement de $C_1 A_1$ et $B_1 T$ celui de $C_1 B_1$. $A_1 C$ est la bissectrice de l'angle extérieur $B_1 A_1 S$ et $B_1 C$ celle de l'angle extérieur $A_1 B_1 T$; leur point d'intersection C, sommet du triangle donné, est donc le centre du cercle ex-inscrit au triangle $A_1 B_1 C_1$.

De 3° et 6° résulte, le point d'intersection H des hauteurs étant le centre du cercle inscrit[1] dans le triangle des pieds des hauteurs:

THÉORÈME. — *Le cercle circonscrit à un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *divise en deux parties égales les distances entre le centre* (H) *du cercle inscrit et les centres* (A, B, C) *des cercles ex-inscrits.*

7° *Le centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs est le point milieu de la distance de l'orthocentre* H *du triangle donné au centre* O *du cercle circonscrit à ce triangle.*

En effet, le rectangle $VO'' O''' T$ étant inscrit dans le « cercle des 9 points », ses diagonales VO''' et $O'' T$ sont des diamètres de ce cercle et leur point d'intersection en est le centre M. Les triangles MOT et MHO'' sont égaux ($MT = MO''$, $OT = \frac{i''}{2} = HO''$ et $\sphericalangle T = \sphericalangle O''$). Par suite $MO = MH$ et les angles en M sont égaux: MH est donc le prolongement de OM.

8° *La ligne des centres* (MO'') *des cercles circonscrits au triangle des pieds des hauteurs et à l'un quelconque des triangles aux sommets* ($BA_1 C_1$) *est perpendiculaire sur le milieu du côté commun* (*aux deux triangles*).

Car le côté commun $C_1 A_1$ aux deux triangles est la corde commune aux deux cercles.

MT étant le prolongement de $O'' M$, la propriété précédente donne lieu à la suivante:

9° *La droite qui joint le point milieu* O'' *du segment supérieur d'une hauteur du triangle donné au point milieu* T *du côté opposé est perpendiculaire sur le milieu du côté correspondant* $C_1 A_1$ *du triangle des pieds des hauteurs. Cette droite de jonction* $O'' T$ *est un diamètre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs.*

10° *Les points milieu des segments inférieurs des hauteurs*

[1] ou d'un des cercles ex-inscrits.

d'un triangle sont sur la circonférence dont le rayon est le quart du rayon du cercle circonscrit au triangle donné et dont le centre est le point milieu de la distance de l'orthocentre H *du triangle donné au centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs.*

En effet, les points milieu I, J, K des segments inférieurs des hauteurs du triangle donné ABC sont les pieds des hauteurs du triangle $O' O'' O'''$; d'après la 7^{me} propriété, le cercle circonscrit au triangle IJK des pieds des hauteurs a donc pour rayon la moitié du rayon R_1 du cercle circonscrit au triangle $O' O'' O'''$ qui vaut lui-même la moitié du rayon R du cercle circonscrit au triangle donné ABC. D'autre part, H étant aussi l'orthocentre du triangle $O' O'' O'''$ et M le centre du cercle circonscrit à ce triangle, le centre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs correspondant IJK est au milieu de HM (C.Q.F.D.).

Les segments inférieurs des hauteurs du triangle donné ABC étant les segments supérieurs des bissectrices du triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$, la 10^{me} propriété donne lieu à la suivante:

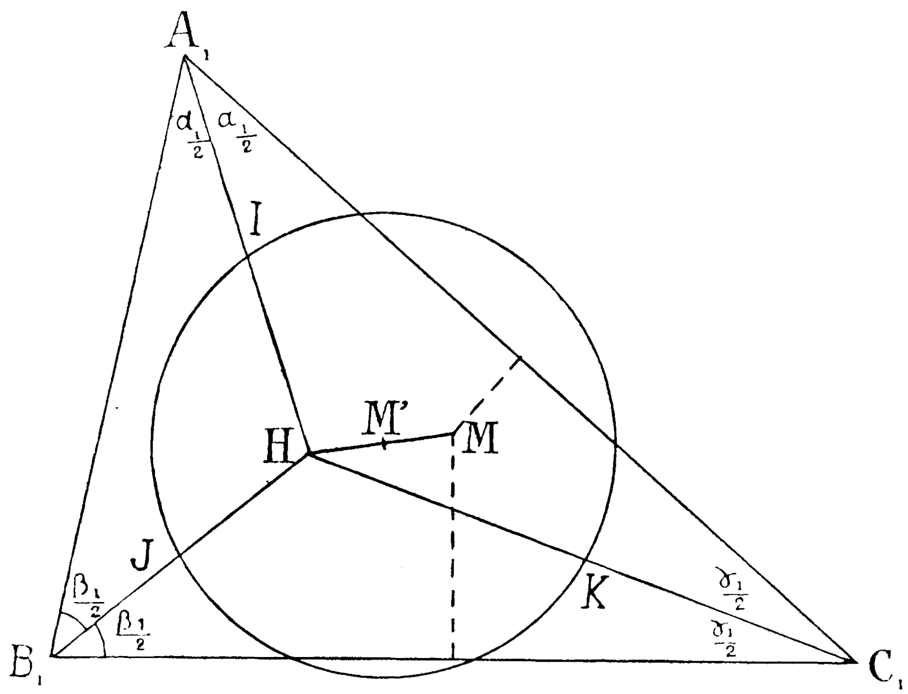

Fig. 13.

11° *Les points milieu des segments supérieurs des bissectrices des angles d'un triangle* ($A_1 B_1 C_1$) *sont sur la circonférence dont le rayon est la moitié du rayon* (R_1) *du cercle circonscrit et dont le* *centre* M′ *est le point milieu de la distance des centres* H *et* M *des cercles inscrit et circonscrit* (fig. 12 et 13).

Le triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$ étant un triangle *quelconque*, la 11^{me} propriété est aussi applicable au triangle donné ABC.

9. — Produits égaux (fig. 14).

Théorème 1. — *Si des sommets du triangle des pieds des hauteurs on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle donné, les produits de trois perpendiculaires de même sens sont égaux* (fig. 14).

Démonstration.

$$A_1G = c_1 \sin\beta\ , \qquad A_1K = b_1 \sin\gamma\ ,$$
$$B_1I = a_1 \sin\gamma\ , \qquad C_1M = a_1 \sin\beta\ ,$$
$$C_1J = b_1 \sin\alpha\ , \qquad B_1L = c_1 \sin\alpha\ .$$

Par suite

$$\underline{A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J = A_1K \,.\, C_1M \,.\, B_1L\ .} \qquad (61)$$

Théorème 2. — *Le produit des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des distances de même sens des sommets du triangle des pieds des hauteurs aux côtés du triangle donné* (fig. 14):

$$\underline{AD \,.\, BE \,.\, CF = A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J \left(= \frac{S_1^2}{r_1}\right)\ .} \qquad (62)$$

Démonstration.

$$AD = c' \sin\gamma\ , \qquad A_1G = a'' \sin\gamma\ ,$$
$$BE = a' \sin\alpha\ , \qquad B_1I = b'' \sin\alpha\ ,$$
$$CF = b' \sin\beta\ , \qquad C_1J = c'' \sin\beta\ ,$$

d'où résulte

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = a'b'c' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)$$

et

$$A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J = a''b''c'' (\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma)\ .$$

Mais, d'après le théorème de Ceva

$$a' b' c' = a'' b'' c'' .$$

Donc

$$AD \,.\, BE \,.\, CF = A_1G \,.\, B_1I \,.\, C_1J \,(= A_1K \,.\, C_1M \,.\, B_1L) .$$

THÉORÈME 3. — *Le produit des trois côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit de trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés du triangle donné* (fig. 14):

$$\underline{a_1 b_1 c_1 = a' b' c' \,(= a'' b'' c'')} . \qquad (63)$$

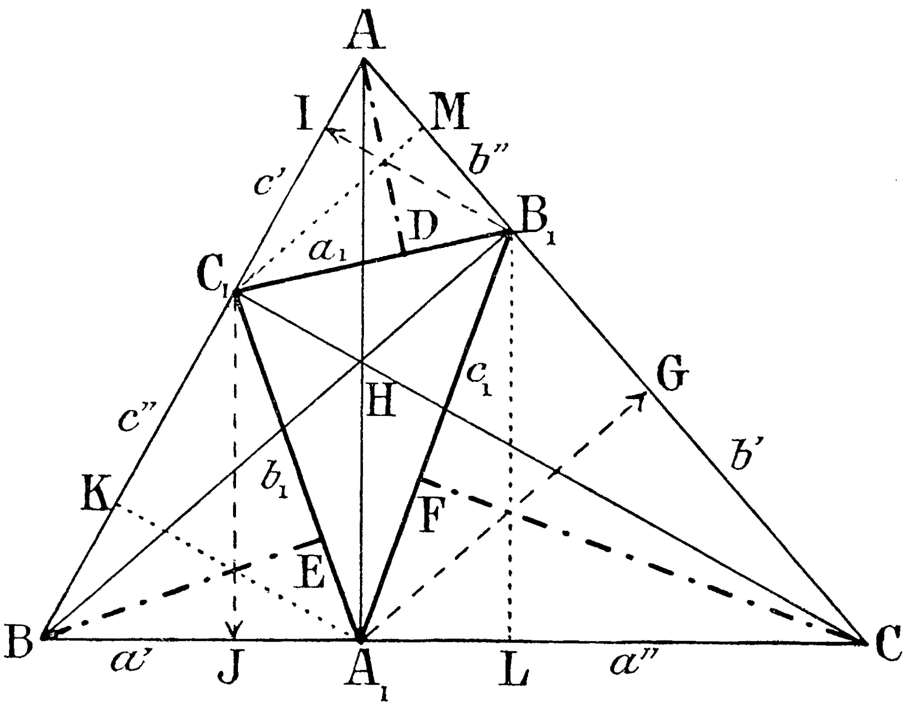

Fig. 14.

Démonstration.

$$a_1 = a \cos \alpha , \qquad a' = c \cos \beta ,$$
$$b_1 = b \cos \beta , \qquad b' = a \cos \gamma ,$$
$$c_1 = c \cos \gamma , \qquad c' = b \cos \alpha .$$

Par suite

$$a_1 b_1 c_1 = a' b' c' .$$

Remarque. — Ce théorème peut aussi être démontré au moyen des triangles semblables AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1.

THÉORÈME 4. — *Le produit de deux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des deux segments qui concourent avec eux* (fig. 14).

Démonstration.

$$\Delta\, AB_1C_1 \sim \Delta\, BC_1A_1 :$$

$$a_1 : c' = c'' : b_1 ;$$

$$\left\{\begin{aligned} a_1 b_1 &= c'c'' , \\ b_1 c_1 &= a'a'' , \\ c_1 a_1 &= b'b'' . \end{aligned}\right. \tag{64}$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1° Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs:

THÉORÈME 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1, b_1, c_1 passent donc par O.

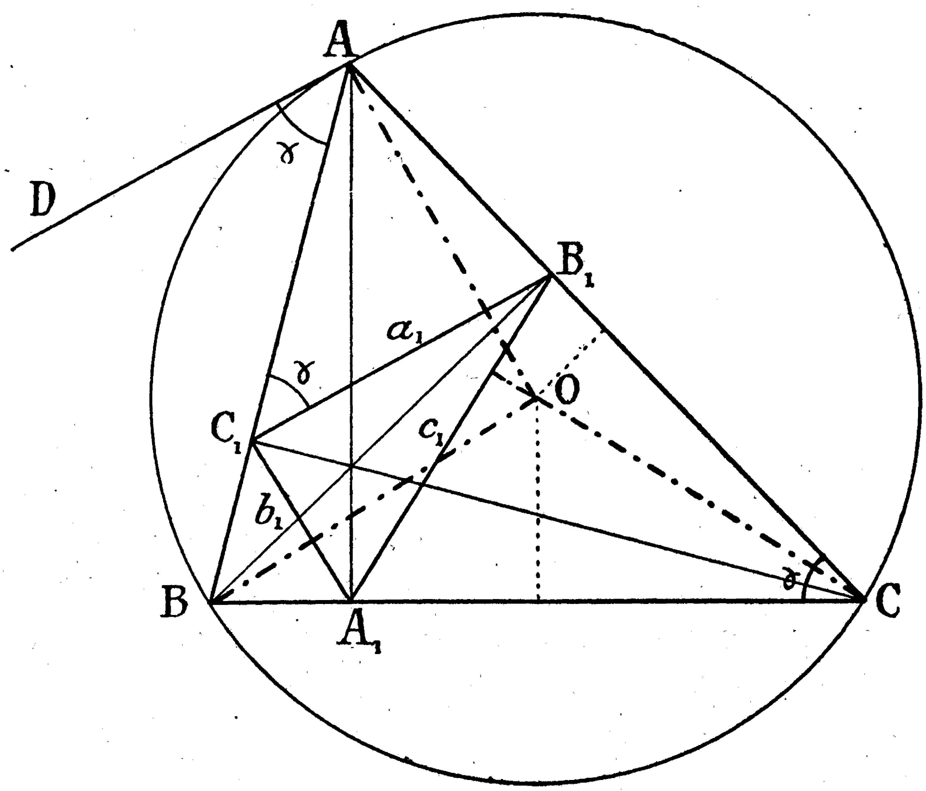

Fig. 15.

Remarque 1. — On peut aussi démontrer ce théorème en se basant sur la *réciproque du théorème de Ceva.*

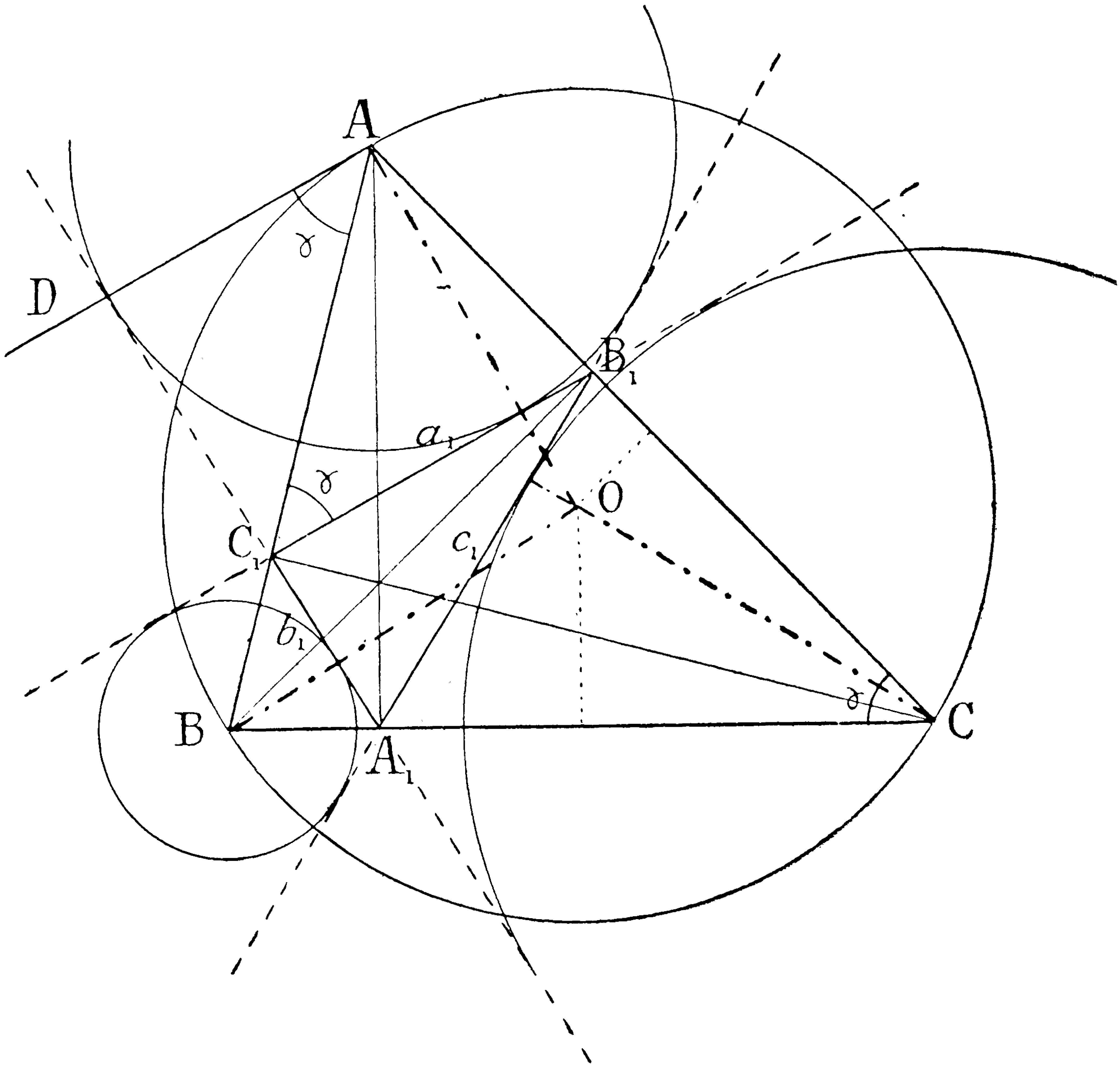

Fig. 16.

Remarque 2. — Les sommets du triangle donné (ABC) étant les centres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs (A_1 B_1 C_1), les perpendiculaires en question sont les rayons aboutissant aux points de contact des côtés (fig. 16). Le théorème ci-dessus peut donc aussi s'énoncer comme suit:

Théorème 1′. — *Si l'on construit les cercles ex-inscrits à un triangle* (A_1 B_1 C_1) *et les rayons aboutissant aux points de contact des côtés, les prolongements de ces trois rayons se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle ayant pour sommets les centres* (A, B, C) *des cercles ex-inscrits* (fig. 16).

2° Abaissons, comme précédemment, de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et joignons les pieds aux sommets opposés de ce second triangle:

THÉORÈME 2. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne les pieds de ces perpendiculaires aux sommets opposés de ce dernier triangle, les trois droites ainsi obtenues se coupent en un même point* (fig. 17).

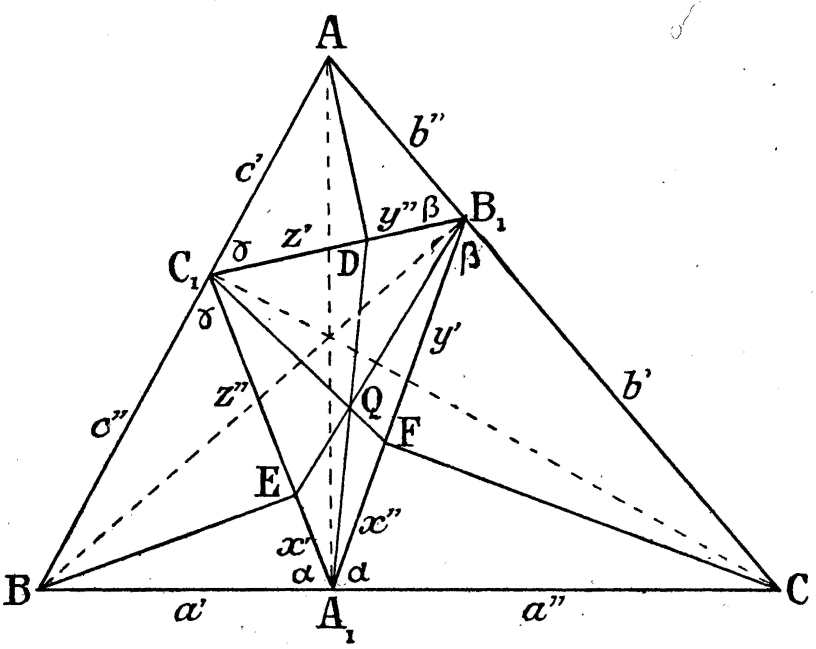

Fig. 17.

Démonstration.

$$x' = a' \cos \alpha \,, \qquad x'' = a'' \cos \alpha \,,$$

$$y' = b' \cos \beta \,, \qquad y'' = b'' \cos \beta \,,$$

$$z' = c' \cos \gamma \,, \qquad z'' = c'' \cos \gamma \,.$$

Mais

$$a' b' c' = a'' b'' c'' \text{ (Théorème de Ceva) .}$$

Donc

$$\underline{\underline{x' y' z' = x'' y'' z''}} \,. \tag{65}$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites $A_1 D$, $B_1 E$ et $C_1 F$ se coupent en un même point Q. Ce point est le *cinquième point remarquable* du triangle des pieds des hauteurs.

Remarque. — De (55) $A_1 E = B_1 D$, $C_1 D = A_1 F$, $B_1 F = C_1 E$ résulte aussi $A_1 E \cdot C_1 D \cdot B_1 F = A_1 F \cdot B_1 D \cdot C_1 E$.

3° Menons les bissectrices des angles d'un triangle et joignons leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs aux sommets opposés de ce 2me triangle:

THÉORÈME 3. — *Si l'on mène les bissectrices des angles d'un triangle jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs et qu'on joigne ces points d'intersection aux sommets opposés du second triangle, les trois transversales ainsi obtenues se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient G, N et T les points d'intersection des bissectrices avec les côtés respectifs a_1, b_1, c_1 (fig. 18):

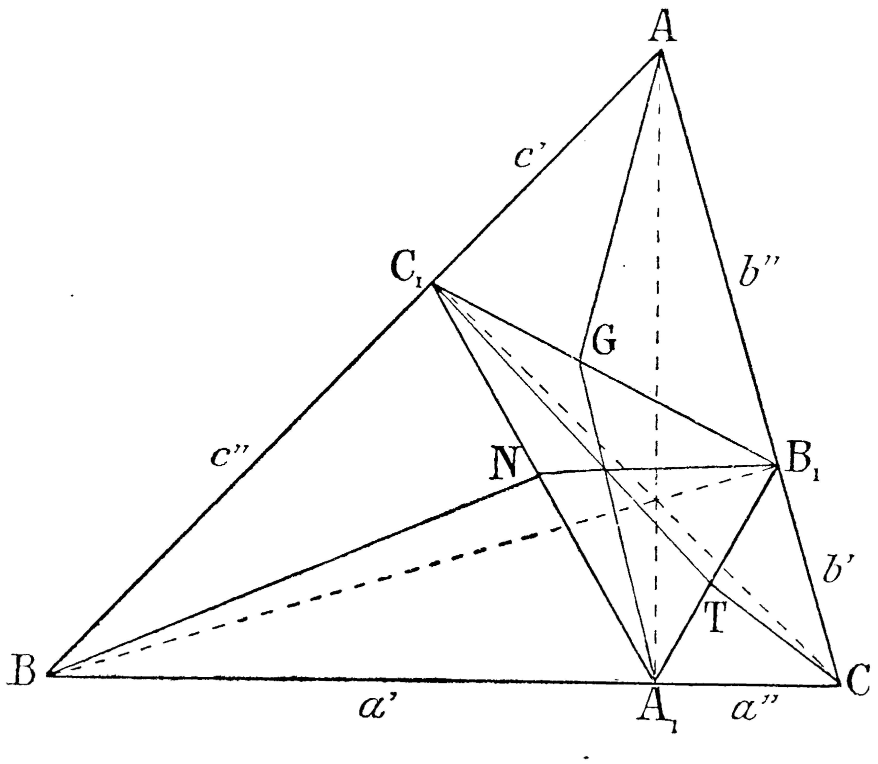

Fig. 18.

$$\Delta\ A_1B_1C \ldots A_1T : B_1T = a'' : b' ,$$

$$\Delta\ B_1C_1A \ldots B_1G : C_1G = b'' : c' ,$$

$$\Delta\ C_1A_1B \ldots C_1N : A_1N = c'' : a' ,$$

d'où

$$A_1T \,.\, B_1G \,.\, C_1N : A_1N \,.\, C_1G \,.\, B_1T = a''b''c'' : a'b'c' .$$

Mais

$$a'b'c' = a''b''c'' .$$

Par suite

$$\underline{A_1T \cdot B_1G \cdot C_1N = A_1N \cdot C_1G \cdot B_1T} \,. \tag{66}$$

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé:* on peut remplacer les trois hauteurs du triangle donné par trois transversales quelconques AA′, BB′, CC′ issues des sommets et se coupant en un même point: en menant les bissectrices des angles A, B, C jusqu'à leurs points d'intersection avec les côtés respectifs du triangle A′ B′ C′ et en joignant ces points aux sommets opposés A′, B′, C′, on obtient trois droites se coupant en un même point. (La démonstration est exactement la même.)

4° Construisons les hauteurs A_1 D, B_1 E, C_1 F du triangle des pieds des hauteurs et joignons leurs pieds D, E, F aux sommets correspondants A, B, C du triangle donné (fig. 19):

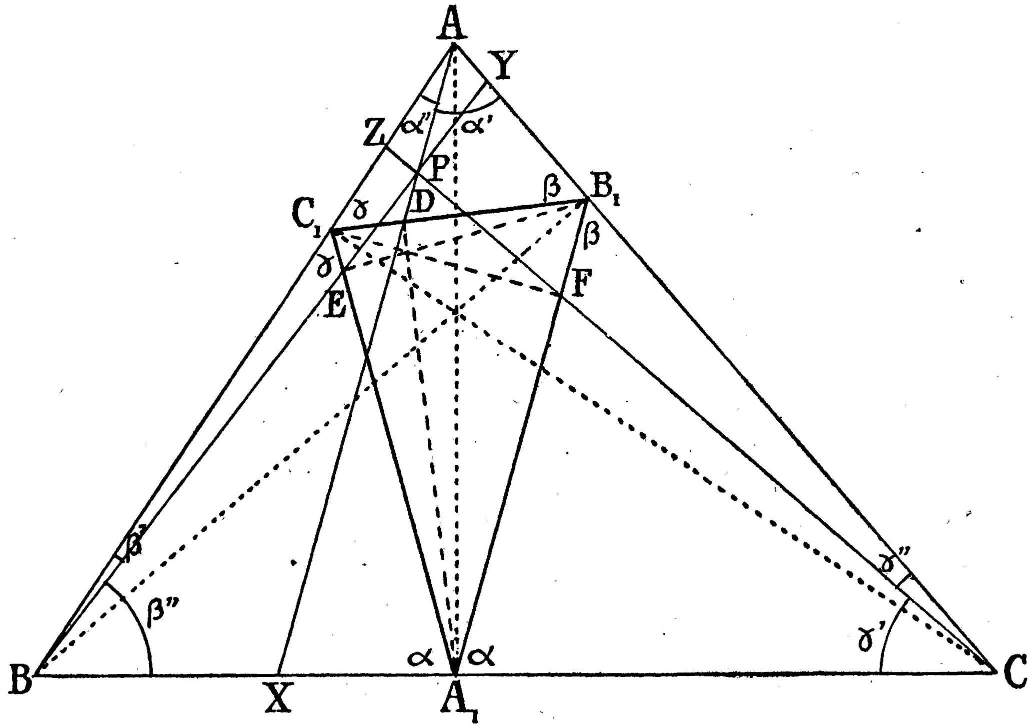

Fig. 19.

Théorème 4. — *Les droites de jonction des sommets d'un triangle aux pieds des hauteurs correspondantes du triangle des pieds des hauteurs se coupent en un même point.*

Démonstration. — Soient X, Y, Z les points d'intersection de ces droites de jonction avec les côtés respectifs *a*, *b*, *c*. En appliquant le théorème du sinus aux six triangles

$$CFA_1\,,\ CFB_1\,,\ ADB_1\,,\ ADC_1\,,\ BEC_1\,,\ BEA_1\,,\ \text{on obtient}$$

$$1)\ A_1F : CF = \sin\gamma' : \sin\alpha\ ; \qquad 2)\ CF : B_1F = \sin\beta : \sin\gamma''\ ;$$

$$3)\ B_1D : AD = \sin\alpha' : \sin\beta\ ; \qquad 4)\ AD : C_1D = \sin\gamma : \sin\alpha''\ ;$$

$$5)\ C_1E : BE = \sin\beta' : \sin\gamma\ ; \qquad 6)\ BE : A_1E = \sin\alpha : \sin\beta''\ .$$

$$1)\,.\,2)\ \ldots\ A_1F : B_1F = \sin\beta\sin\gamma' : \sin\alpha\sin\gamma''\ ,$$

$$3)\,.\,4)\ \ldots\ B_1D : C_1D = \sin\gamma\sin\alpha' : \sin\beta\sin\alpha''\ ,$$

$$5)\,.\,6)\ \ldots\ C_1E : A_1E = \sin\alpha\sin\beta' : \sin\gamma\sin\beta''\ ,$$

d'où

$$\alpha)\ A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E : A_1E\,.\,C_1D\,.\,B_1F = \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma' : \sin\alpha''\sin\beta''\sin\gamma''\ .$$

Appliqué aux six triangles CZA, CZB, AXB, AXC, BYC, BYA, le théorème du sinus donne

$$1)'\ AY : BY = \sin\beta' : \sin\alpha\ ; \qquad 2)'\ BY : CY = \sin\gamma : \sin\beta''\ ;$$

$$3)'\ CX : AX = \sin\alpha' : \sin\gamma\ ; \qquad 4)'\ AX : BX = \sin\beta : \sin\alpha''\ ;$$

$$5)'\ BZ : CZ = \sin\gamma' : \sin\beta\ ; \qquad 6)'\ CZ : AZ = \sin\alpha : \sin\gamma''\ .$$

$$1)'\,.\,2)'\ \ldots\ AY : CY = \sin\gamma\sin\beta' : \sin\alpha\sin\beta''\ ,$$

$$3)'\,.\,4)'\ \ldots\ CX : BX = \sin\beta\sin\alpha' : \sin\gamma\sin\alpha''\ ,$$

$$5)'\,.\,6)'\ \ldots\ BZ : AZ = \sin\alpha\sin\gamma' : \sin\beta\sin\gamma''\ ,$$

d'où

$$\beta)\ AY\,.\,CX\,.\,BZ : AZ\,.\,BX\,.\,CY = \sin\alpha'\sin\beta'\sin\gamma' : \sin\alpha''\sin\beta''\sin\gamma''\ .$$

De α) et β) résulte

$$AY\,.\,CX\,.\,BZ : AZ\,.\,BX\,.\,CY = A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E : A_1E\,.\,C^1D\,.\,B_1F = 1\ ,$$

car, d'après le théorème de Ceva appliqué aux hauteurs A_1D, B_1E et C_1F:

$$A_1F\,.\,B_1D\,.\,C_1E = A_1E\,.\,C_1D\,.\,B_1F\ .$$

Donc

$$\underline{AZ\,.\,BX\,.\,CY = AY\,.\,CX\,.\,BZ\ .} \tag{67}$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Ceva, les trois droites AX, BY, CZ se coupent en un même point P.

11. — Points en ligne droite.

1° Déterminons les points d'intersection X, Y, Z des côtés correspondants — ou leurs prolongements — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs (fig. 20):

THÉORÈME 1. — *Les côtés correspondants — ou les prolongements des côtés — d'un triangle et du triangle des pieds des hauteurs se coupent en trois points en ligne droite.*

Démonstration. — 1er PROCÉDÉ. — Le théorème de *Menelaüs* appliqué aux trois transversales $A_1 B_1 Z$, $C_1 B_1 X$, $C_1 A_1 Y$ du triangle ABC donne successivement

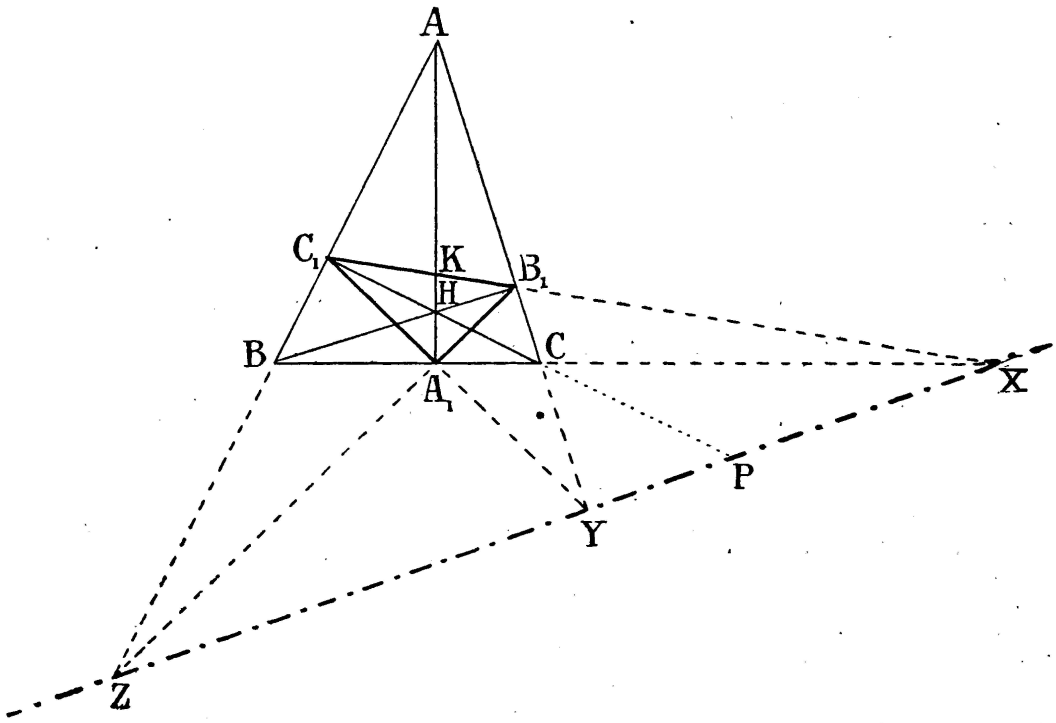

Fig. 20.

$$1)\quad \underline{AZ} \,.\, BA_1 \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, \underline{BZ} \;,$$

$$2)\quad AC_1 \,.\, \underline{BX} \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, \underline{CX} \,.\, BC_1 \;.$$

$$3)\quad AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, \underline{CY} = \underline{AY} \,.\, CA_1 \,.\, BC_1 \;.$$

En multipliant membre à membre, on obtient

$$\alpha)\ (AZ \,.\, BX \,.\, CY) \,.\, (AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1)^2 = (AY \,.\, CX \,.\, BZ) \,.\, (AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1)^2 \;.$$

Or, d'après le théorème de *Ceva* appliqué aux hauteurs du triangle ABC, on a

$$4)\ AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1 \ ,$$

d'où

$$4)'\ (AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1)^2 = (AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1)^2 \ .$$

$$\alpha) : 4)' \ldots \underline{AZ \,.\, BX \,.\, CY = AY \,.\, CX \,.\, BZ} \ . \qquad (68)$$

Par suite, d'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

2me PROCÉDÉ. — *Dans un quadrilatère complet, les trois diagonales se coupent harmoniquement.* Donc (fig. 20):

$$\text{Quadrilatère complet } CB_1HA_1AB \ldots 1)\ \frac{AZ}{BZ} = \frac{AC_1}{BC_1} \ ,$$

$$\text{» \quad »} \quad AC_1HB_1BC \ldots 2)\ \frac{BX}{CX} = \frac{BA_1}{CA_1} \ ,$$

$$\text{» \quad »} \quad BA_1HC_1CA \ldots 3)\ \frac{CY}{AY} = \frac{CB_1}{AB_1} \ .$$

Multiplions membre à membre:

$$\alpha)\ \frac{AZ \,.\, BX \,.\, CY}{AY \,.\, CX \,.\, BZ} = \frac{AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1}{AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1} \ .$$

Les transversales AA_1 , BB_1 , CC_1 (issues des sommets A, B, C) se coupant en un même point H, on a, d'après le théorème de Ceva

$$AC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CB_1 = AB_1 \,.\, CA_1 \,.\, BC_1 \ .$$

Le second membre de α) est donc égal à 1, par suite aussi le 1er; donc

$$\underline{AZ \,.\, BX \,.\, CY = AY \,.\, CX \,.\, BZ} \ .$$

D'après la réciproque du théorème de Menelaüs, les trois points X, Y, Z sont en ligne droite.

Remarque. — Ce théorème peut être *généralisé:* En appliquant les mêmes procédés de démonstration au cas de trois transversales *quelconques* issues des sommets d'un triangle et se coupant en un même point, on aboutit au résultat suivant:

THÉORÈME 2. — *Si l'on mène par les sommets d'un triangle trois transversales se coupant en un même point et qu'on détermine leurs* *points d'intersection avec les côtés correspondants, les droites de jonction de ces trois points coupent les côtés respectifs du triangle en trois points en ligne droite.*

THÉORÈME 3. — *Chaque hauteur d'un triangle détermine sur la droite de jonction des points d'intersection* X, Y, Z *des côtés avec les côtés respectifs du triangle des pieds des hauteurs le* 4me *harmonique de ces points* X, Y, Z (fig. 20).

Démonstration. — Soit P le point d'intersection de la hauteur CC_1 avec la droite XY. Les quatre points A, K, H, A_1 forment un groupe harmonique, car la diagonale AH du quadrilatère complet AC_1 HB_1 BC est coupée harmoniquement par les deux autres C_1 B_1 et BC. En les projetant à partir du point C_1, on obtient le faisceau harmonique C_1 $(AKHA_1)$ et celui-ci coupe la droite XYZ en quatre points harmoniques ZXPY (c.q.f.d.).

2° On sait que le centre O du cercle circonscrit à un triangle, son centre de gravité G et l'orthocentre H sont en ligne droite ($GO = \frac{1}{2}$ GH). En se basant sur cette propriété et en appliquant la 7me propriété (voir 8) au triangle IJK des pieds des hauteurs du triangle O′ O″ O‴ (ou la 10me au triangle ABC), on est conduit au théorème suivant (fig. 12 et 21):

THÉORÈME 4. — *Le centre* O *du cercle circonscrit à un triangle donné, le centre de gravité* G, *le point* H *d'intersection des hauteurs (ou le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs), le centre* M *du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs (ou le centre du cercle passant par les points milieu* O′, O″, O‴ *des segments supérieurs des hauteurs), le centre de gravité* G′ *du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs et le centre* M′ *du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs sont (6 points) en ligne droite.*

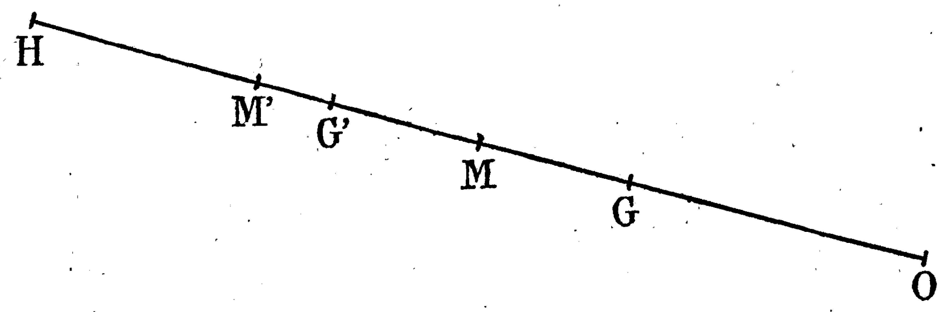

Fig. 21.

Positions relatives de ces points :

$$\mathrm{HG} = 2 \,.\, \mathrm{GO}\,, \quad \mathrm{HM} = \mathrm{MO}\,, \quad \mathrm{HG}' = 2 \,.\, \mathrm{G'M}\,, \quad \mathrm{HM}' = \mathrm{M'M} = \frac{1}{4}\,\mathrm{HO}\,,$$

$$\mathrm{HG}' = \mathrm{G'G}\,.$$

Rayons des cercles en question :

$$\mathrm{OA} = \mathrm{R}\,, \qquad \mathrm{MA}_1 = \mathrm{R}_1 = \frac{\mathrm{R}}{2}\,, \qquad \mathrm{M'I} = \frac{\mathrm{R}_1}{2} = \frac{\mathrm{R}}{4}\,.$$

3° On sait que l'orthocentre H d'un triangle, le point d'intersection Q des transversales joignant les sommets aux points de contact des cercles ex-inscrits, le centre O du cercle circonscrit et le centre C′ du cercle inscrit sont les quatre sommets d'un trapèze dont les diagonales se coupent au centre de gravité G du triangle (fig. 22). La grande base HQ est le double de la petite

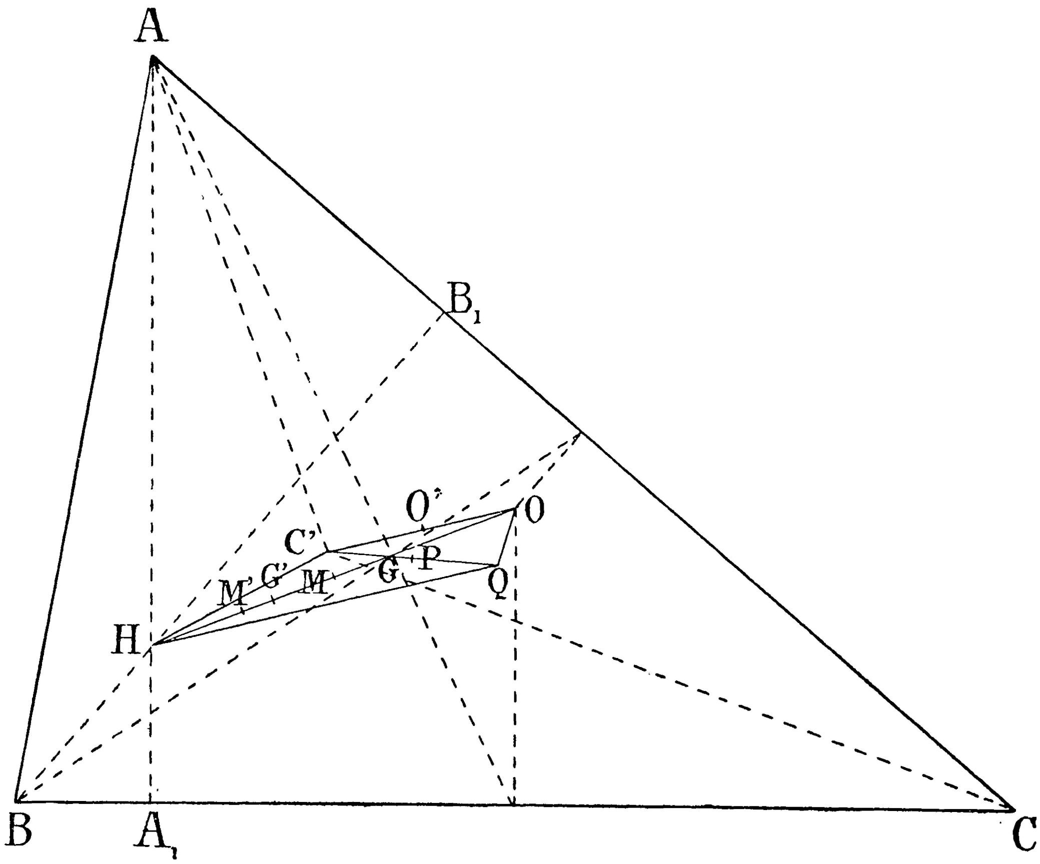

Fig. 22.

base C′ O. Ces points H, G, O, C′, Q sont les 5 points remarquables du triangle. Le point milieu M de la diagonale HO est le centre du « cercle des 9 points », donc le centre du cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs et le point milieu P de la diagonale C′ Q, le centre du cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les points milieu des côtés du triangle donné.

D'après ce qui précède, nous sommes à même de fixer, sur la petite base C′ O et la diagonale HO du trapèze, les positions de 3 nouveaux points qui sont:

1. Le centre O′ du cercle passant par les points milieu des segments supérieurs des bissectrices: il est situé au milieu de la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit (voir 8, 11me propriété), donc au milieu de la petite base C′ O du trapèze;

2. Le centre M′ du cercle passant par les points milieu des segments inférieurs des hauteurs: il se trouve au milieu de HM, donc au quart de la diagonale HO à partir de l'orthocentre H;

3. Le centre de gravité G′ du triangle ayant pour sommets les points milieu des segments supérieurs des hauteurs: il est au milieu du segment HG de la diagonale HO.

En résumé (fig. 22):

$$HQ = 2 . C'O \; ; \qquad HM = MO \; ; \qquad C'P = PQ \; ;$$
$$C'O' = O'O \; ; \qquad HM' = M'M \; ; \qquad HG' = G'G = GO \; .$$

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur les hauteurs d'un triangle.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt le travail sur les hauteurs d'un triangle publié par M. Streit dans l'*Enseign. Math.* (Tome XXV, p. 22-45, 1926). Permettez-moi de faire remarquer que le résultat exposé au § 4 (p. 31-32) n'est qu'un cas particulier d'une propriété plus générale. En effet, en remplaçant les hauteurs par les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du plan du triangle sur les côtés, on trouve encore que les sommes des carrés construits sur trois segments non consécutifs sont égales.