7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Remarque. — En appliquant ce théorème au cas où le triangle ABC donné est rectangle en A, on retrouve la relation connue:

$$h'^2 = a' \cdot a'' .$$

7. — Propriétés résultant des relations (3) et (2).

1° *Chaque côté du triangle des pieds des hauteurs est égal à la projection du côté correspondant du triangle donné sur la tangente en l'une de ses extrémités au cercle circonscrit à ce dernier triangle.*

En effet (fig. 9):

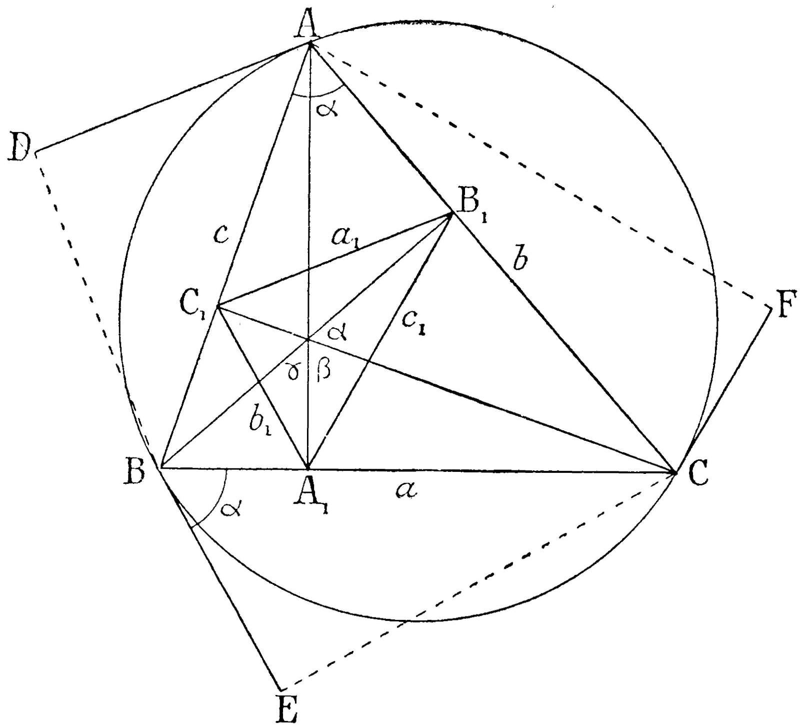

Fig. 9.

$$\begin{cases} BE = a \cos \alpha = a_1 , \\ CF = b \cos \beta = b_1 , \\ AD = c \cos \gamma = c_1 . \end{cases} \tag{47}$$

2° *La projection de chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé est égale à la somme des deux côtés non-correspondants du triangle des pieds des hauteurs.*

Car on a, en désignant par GD la projection de a sur la tangente en A (fig. 10):

$$GD = GA + AD = b \cos \beta + c \cos \gamma \ ,$$

ou

$$\begin{cases} GD = b_1 + c_1 \ , \\ KE = c_1 + a_1 \ , \\ LF = a_1 + b_1 \ . \end{cases} \tag{48}$$

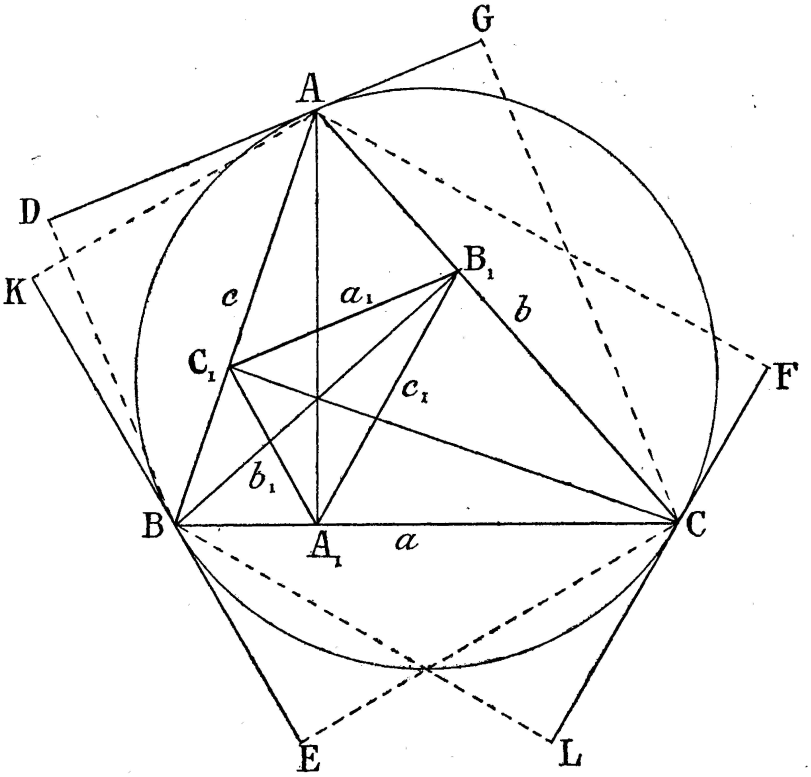

Fig. 10.

3° *Si l'on projette chaque côté du triangle donné sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au double périmètre du triangle des pieds des hauteurs* (fig. 10).

En additionnant membre à membre les trois égalités ci-dessus, on obtient en effet:

$$GD + KE + LF = 2u_1 \ . \tag{49}$$

4° *Si l'on projette chaque côté d'un triangle sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet opposé correspondant, la somme des trois projections est égale au périmètre du triangle multiplié par le rapport du diamètre du cercle inscrit au rayon du cercle circonscrit* (fig. 10).

Car la relation précédente peut s'écrire:

$$GD + KE + LF = 2(a_1 + b_1 + c_1) = 2(a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma) .$$

Mais

$$\frac{a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma}{a + b + c} = \frac{r}{R} . \tag{50}$$

Par suite

$$\underline{GD + KE + LF = (a + b + c) \frac{2r}{R} = u . \frac{2r}{R}} . \tag{51}$$

5º *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur la tangente menée au cercle circonscrit par le sommet suivant, la somme des trois perpendiculaires est égale à la somme des diamètres des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs* (fig. 10).

Démonstration.

$$AF = b \sin \beta , \quad CE = a \sin \alpha , \quad BD = c \sin \gamma ;$$

$$AF + CE + BD = a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma .$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R , \quad a = 2R \sin \alpha , \quad b = 2R \sin \beta , \quad c = 2R \sin \gamma ;$$

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2R [\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma] .$$

Or d'après (27)

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{2R + r_1}{R} .$$

Donc

$$\underline{a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 2(2R + r_1)} \tag{52}$$

et

$$\underline{AF + CE + BD = 2(2R + r_1)} , \tag{53}$$

ou, en vertu de (40')

$$\underline{AF + CE + BD = d_{a_1} + d_{b_1} + d_{c_1}} . \tag{53'}$$

6º *La somme des projections des deux segments d'un côté du triangle donné sur les côtés adjacents du triangle des pieds des hauteurs est égale au troisième côté de ce dernier triangle.*

En effet (fig. 4):

$$A_1E = a' \cos\alpha \ , \qquad A_1F = a'' \cos\alpha \ ,$$

$$A_1E + A_1F = (a' + a'') \cos\alpha = a \cos\alpha = a_1 \ ;$$

$$\underline{A_1E + A_1F = a_1} \ , \quad \underline{B_1F + B_1D = b_1} \ , \quad \underline{C_1D + C_1E = c_1} \ . \qquad (54)$$

Remarque. — D'après les formules (55), on aurait d'emblée:

$$A_1E = B_1D \ , \quad A_1F = C_1D \ ; \quad \text{donc} \quad A_1E + A_1F = a_1 \ .$$

7° *a*) On a (fig. 1):

$$a' = c \cos\beta \ ,$$

$$a' \cos\alpha = (c \cos\alpha) \cos\beta \ ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} a' \cos\alpha = b'' \cos\beta \\ b' \cos\beta = c'' \cos\gamma \\ c' \cos\gamma = a'' \cos\alpha \end{array}\right. \quad \begin{array}{c} \text{ou} \\ \text{»} \\ \text{»} \end{array} \quad \left\{\begin{array}{l} A_1E = B_1D \ , \\ B_1F = C_1E \ , \\ \underline{C_1D = A_1F} \ , \end{array}\right. \qquad (55)$$

d'où

$$a' \cos\alpha + b' \cos\beta + c' \cos\gamma = a'' \cos\alpha + b'' \cos\beta + c'' \cos\gamma = \frac{u_1}{2} \ , \quad (56)$$

c'est-à-dire

Si l'on projette les segments déterminés sur les côtés d'un triangle par les hauteurs correspondantes sur les tangentes menées par les sommets respectifs au cercle circonscrit, les sommes des projections de trois segments non-consécutifs sont égales et ont pour valeur la moitié du périmètre du triangle des pieds des hauteurs.

De la relation précédente résulte

$$\underline{(a' - a'') \cos\alpha + (b' - b'') \cos\beta + (c' - c'') \cos\gamma = 0} \ . \qquad (57)$$

b) Exprimons et comparons les segments B_1D et C_1X (fig. 11):

$$B_1D = b'' \cos\beta \ ,$$

$$C_1X = i''' \cos(90 - \gamma) = i''' \sin\gamma \ .$$

Or

$$i''' = s' \cos\beta = \frac{b''}{\sin\gamma} \cos\beta \ .$$

Remplaçons

$$C_1X = b'' \cos \beta \ .$$

Par suite

$$\underline{B_1D = C_1X} \ , \quad \underline{C_1Y = A_1E} \ , \quad \underline{A_1Z = B_1F} \ . \tag{58}$$

On retrouve ainsi le *théorème connu* suivant:

Chaque côté d'un triangle est divisé par les points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit en trois segments dont les deux extrêmes sont égaux.

c) *Distances des points de contact des cercles inscrits et ex-inscrits* (fig. 11).

Soit $b_1 < a_1 < c_1$. En tenant compte des relations (55) et (58), on a:

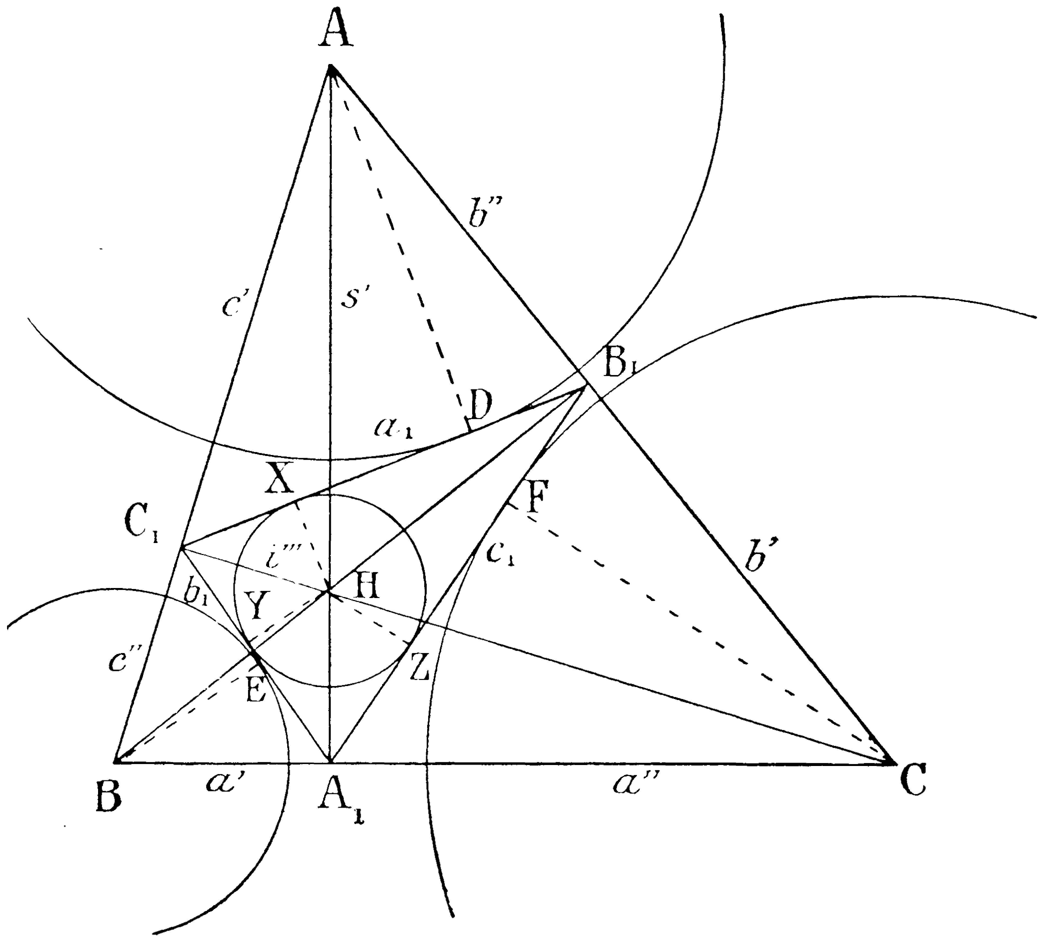

Fig. 11.

$$XD = C_1D - C_1X = A_1F - C_1Y = A_1F - A_1E =$$
$$= (A_1F + FB_1) - (A_1E + EC_1) = c_1 - b_1 \ ;$$
$$\underline{XD = c_1 - b_1} \ , \quad \underline{YE = c_1 - a_1} \ , \quad \underline{ZF = a_1 - b_1} \ , \tag{59}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *Sur chaque côté d'un triangle, la distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit est égale à la différence des deux autres côtés.*

Relation entre ces trois distances.

$$\mathrm{YE} + \mathrm{ZF} = c_1 - b_1 \, .$$

Donc

$$\underline{\mathrm{XD} = \mathrm{YE} + \mathrm{ZF} \, ,} \tag{60}$$

c'est-à-dire

THÉORÈME. — *La distance des points de contact des cercles inscrit et ex-inscrit sur le côté moyen d'un triangle est égale à la somme de leurs distances sur les deux autres côtés.*

8. — Autres propriétés (fig. 12).

1° Les hauteurs d'un triangle étant les bissectrices des angles du triangle des pieds des hauteurs, leur point d'intersection H est le centre du cercle inscrit dans ce dernier triangle. En outre, les angles B_1 et C_1 du quadrilatère $AB_1\, HC_1$ par exemple étant droits, ce quadrilatère est inscriptible. Donc:

Les cercles circonscrits aux triangles aux sommets passent par l'orthocentre H *du triangle donné, c'est-à-dire par le centre du cercle inscrit dans le triangle des pieds des hauteurs*[1].

2° *Les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets sont les points milieu des segments supérieurs des hauteurs du triangle donné.*

Car les segments supérieurs des hauteurs sont les diamètres de ces cercles.

3° Les pieds des hauteurs d'un triangle, les points milieu des côtés et les points milieu des segments supérieurs des hauteurs sont situés, comme on sait, sur un même cercle appelé « *cercle des neuf points* ». Ce dernier n'est donc autre que le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs. Par suite:

Le cercle circonscrit au triangle des pieds des hauteurs passe par les centres des cercles circonscrits aux triangles aux sommets.

[1] Si le triangle donné est obtusangle (par exemple ACH, fig. 11), l'orthocentre (B) est alors le centre d'un des cercles ex-inscrits au triangle des pieds des hauteurs ($A_1B_1C_1$) correspondant.