

9. — Produits égaux (fig. 14).

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

centre M' est le point milieu de la distance des centres H et M des cercles inscrit et circonscrit (fig. 12 et 13).

Le triangle des pieds des hauteurs $A_1 B_1 C_1$ étant un triangle quelconque, la 11^{me} propriété est aussi applicable au triangle donné ABC .

9. — Produits égaux (fig. 14).

THÉORÈME 1. — *Si des sommets du triangle des pieds des hauteurs on abaisse les perpendiculaires sur les côtés du triangle donné, les produits de trois perpendiculaires de même sens sont égaux (fig. 14).*

Démonstration.

$$A_1 G = c_1 \sin \beta, \quad A_1 K = b_1 \sin \gamma,$$

$$B_1 I = a_1 \sin \gamma, \quad C_1 M = a_1 \sin \beta,$$

$$C_1 J = b_1 \sin \alpha, \quad B_1 L = c_1 \sin \alpha.$$

Par suite

$$\underline{A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J = A_1 K \cdot C_1 M \cdot B_1 L.} \quad (61)$$

THÉORÈME 2. — *Le produit des distances des sommets d'un triangle aux côtés correspondants du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des distances de même sens des sommets du triangle des pieds des hauteurs aux côtés du triangle donné (fig. 14):*

$$\underline{AD \cdot BE \cdot CF = A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J \left(= \frac{S_1^2}{r_1} \right).} \quad (62)$$

Démonstration.

$$AD = c' \sin \gamma, \quad A_1 G = a'' \sin \gamma,$$

$$BE = a' \sin \alpha, \quad B_1 I = b'' \sin \alpha,$$

$$CF = b' \sin \beta, \quad C_1 J = c'' \sin \beta,$$

d'où résulte

$$AD \cdot BE \cdot CF = a' b' c' (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma)$$

et

$$A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J = a'' b'' c'' (\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma).$$

Mais, d'après le théorème de Ceva

$$a' b' c' = a'' b'' c'' .$$

Donc

$$AD \cdot BE \cdot CF = A_1 G \cdot B_1 I \cdot C_1 J (= A_1 K \cdot C_1 M \cdot B_1 L) .$$

THÉORÈME 3. — *Le produit des trois côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit de trois segments non consécutifs déterminés par les hauteurs sur les côtés du triangle donné (fig. 14):*

$$\underline{a_1 b_1 c_1 = a' b' c' (= a'' b'' c'')} . \quad (63)$$

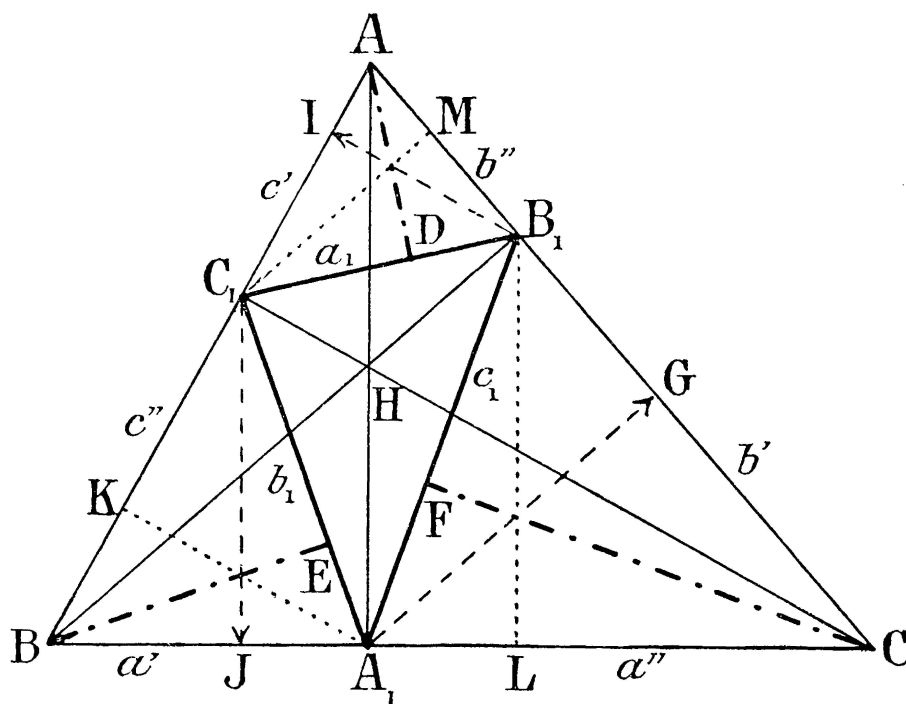


Fig. 14.

Démonstration.

$$a_1 = a \cos \alpha , \quad a' = c \cos \beta ,$$

$$b_1 = b \cos \beta , \quad b' = a \cos \gamma ,$$

$$c_1 = c \cos \gamma , \quad c' = b \cos \alpha .$$

Par suite

$$a_1 b_1 c_1 = a' b' c' .$$

Remarque. — Ce théorème peut aussi être démontré au moyen des triangles semblables AB_1C_1 , BC_1A_1 , CA_1B_1 .

THÉORÈME 4. — *Le produit de deux côtés du triangle des pieds des hauteurs est égal au produit des deux segments qui concourent avec eux (fig. 14).*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Delta AB_1C_1 &\sim \Delta BC_1A_1 : \\ a_1 : c' &= c'' : b_1 ; \\ \left\{ \begin{array}{l} a_1 b_1 = c' c'' , \\ b_1 c_1 = a' a'' , \\ c_1 a_1 = b' b'' . \end{array} \right. & \quad (64) \end{aligned}$$

Remarque. — En multipliant ces trois relations membre à membre, on serait conduit au théorème précédent.

10. — Droites se coupant en un même point.

1^o Abaissons de chaque sommet d'un triangle la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs :

THÉORÈME 1. — *Si l'on abaisse de chaque sommet d'un triangle donné la perpendiculaire sur le côté correspondant du triangle des pieds des hauteurs, ces trois perpendiculaires se coupent en un même point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle donné.*

Démonstration. — Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. On a (fig. 15):

$$AO \perp AD ; \quad \text{mais} \quad AD \parallel a_1 .$$

Donc

$$AO \perp a_1 ; \quad \text{de même} \quad BO \perp b_1 \quad \text{et} \quad CO \perp c_1 .$$

Les perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur a_1 , b_1 , c_1 passent donc par O.

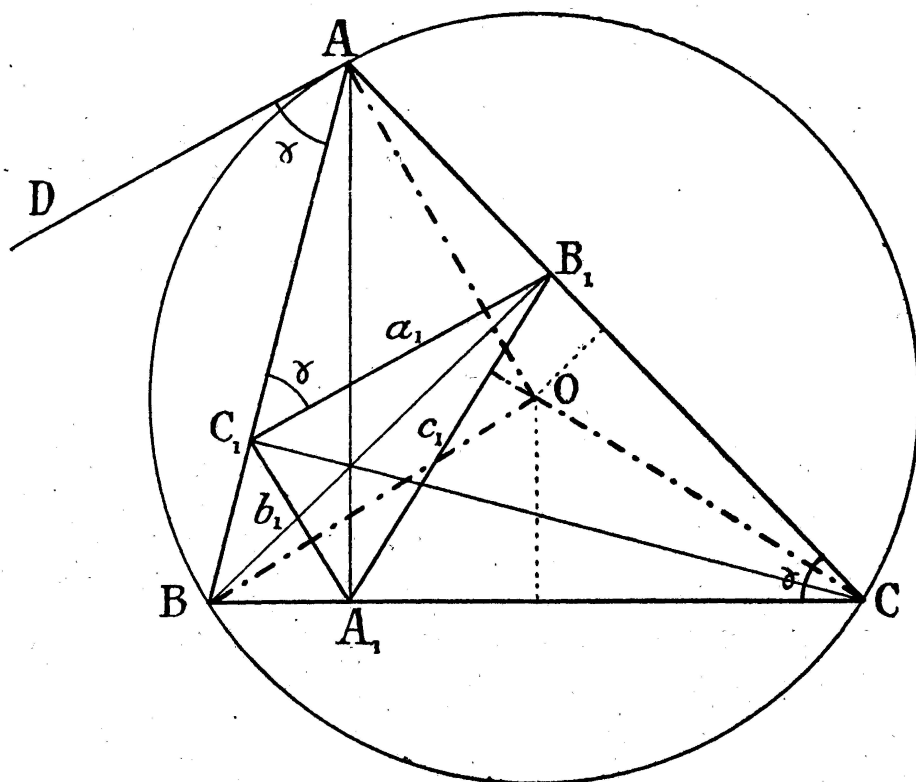


Fig. 15.