

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER
Autor: Appell, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21244>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Ce sur quoi l'on ne reviendra jamais assez, c'est l'influence morale, affective, qu'eut Paul Appell sur plusieurs générations de mathématiciens, influence que d'ailleurs il possède toujours. A cet égard, il est unique. Les éloges qu'on lui décerne maintenant et même depuis fort longtemps en écraseraient beaucoup d'autres; vis-à-vis de lui, rien de plus naturel, car on a conscience qu'on ne lui rendra jamais complètement toute la sympathie qu'il rayonnait autour de lui et qui a éclairé tant d'esprit et tant de cœurs. De plus, ce grand homme a souffert; renvoyons aux *Souvenirs d'un Alsacien* (1858-1922) ceux qui ne seraient pas encore complètement éclairés, sur les déchirements d'une âme de frère et de patriote, et répétons que le 12 juin 1927 fut une grande date, un jour de grande fête pour ceux qui croient à la reconnaissance d'une nation et au rôle lumineux de qui nous fit aimer l'Effort.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

On a, en désignant par h un entier positif quelconque et par C la constante d'Euler,

$$C + \log h = H(h) + S(h) . \quad (1)$$

Le logarithme est népérien. On a fait

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1} ,$$

$$S(h) = (h-1)! \left[\frac{p_2}{h!} + \frac{1! p_3}{(h+1)!} + \frac{2! p_4}{(h+2)!} + \dots \right]$$

avec

$$p_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x) \dots (\nu-1-x)}{\nu!} dx .$$

La fonction $S(h)$ a été donnée, par M. J. Ser, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2^{me} Série, t. IV, 1925, p. 127). On a évidemment

$$S(h) < \frac{1}{h}(p_2 + p_3 + \dots)$$

et, en remplaçant la parenthèse par la valeur 1 donnée par M. Ser,

$$S(h) < \frac{1}{h}.$$

Comme il est d'usage, nous appellerons $E(x)$ le plus grand entier contenu dans x . Quand h croit indéfiniment, $H(h)$ et $EH(h)$ qui n'est jamais égal à $H(h)$ [Voir *Journal de Mathématiques*, 1927, p. 156] croissent indéfiniment.

Soit k une des valeurs entières de h telles que, h variant de $k - 1$ à k , la partie entière $EH(h)$ de $H(h)$ augmente de 1. Comme la même opération fait croître $H(k)$ de $\frac{1}{k-1}$, on a évidemment

$$H(k) - EH(k) < \frac{1}{k-1}$$

car

$$H(k) - H(k-1) = \frac{1}{k-1}, \quad EH(k) > H(k-1).$$

Mais, pour $k \geq 5$,

$$E[H(k) + S(k)] = EH(k),$$

car $H(k) + S(k)$ diffère d'un entier n de moins de

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

et $H(k)$ du même entier n de moins encore, ces excès étant donc tous deux moindres que 1:2.

On a

$$C + \log k = H(k) + S(k) \tag{2}$$

d'où, en prenant les parties entières,

$$E(C + \log k) = EH(k).$$

Il serait absurde de supposer, pour un seul $k \geq 5$,

$$E(C + \log k) = E(\log k)$$

car alors on aurait

$$E(\log k) = EH(k)$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) = H(k) - EH(k) + S(k)$$

ce qui donnerait

$$C + \log k - E(\log k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5};$$

alors C serait ou négatif ou moindre que $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ c'est-à-dire moindre que $\frac{1}{2}$ ce qui est inadmissible. On a donc, pour tous les k ,

$$E(C + \log k) = E(\log k) + 1,$$

$$E(\log k) + 1 = EH(k),$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) - 1 = H(k) - EH(k) + S(k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

et

$$1 - C = \log k - E(\log k) - [H(k) - EH(k) + S(k)] = \log k - E(\log k) - \varepsilon$$

si

$$\varepsilon < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}.$$

Alors, si k augmente indéfiniment,

$$C - 1 + \log k - E(\log k) = 0,$$

$$1 - C = \lim [\log k - E(\log k)],$$

k étant tel que la partie entière de $H(h)$ croisse de 1 quand h varie de $k-1$ à k . La différence $1 - C$ est alors la limite de la partie décimale de $\log k$, l'erreur étant moindre que $\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$.

Pour $k = 5$,

$$H(5) = 2 + \frac{1}{12}, \quad H(4) = 1 + \frac{5}{6};$$

l'erreur ε est, d'après la théorie générale, moindre que $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$, elle est, en réalité,

$$\varepsilon = \frac{1}{12} + S(k) < \frac{1}{12} + \frac{1}{5} < \frac{3}{10} .$$

On peut aussi prendre $k = 12$; alors l'erreur ε est moindre que

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} < \frac{2}{10} .$$

D'après Gauss (*Œuvres*, t. III), on a

$$C = -\Psi(0) = 0,5772 \dots , \quad 1 - C = 0,421 .$$

Pour $k = 5$,

$$\log 5 - E(\log 5) = 0,609$$

qui dépasse $1 - C$ de $\varepsilon = 0,188 < 0,3$.

Pour $k = 12$,

$$\log 12 - E(\log 12) = 0,484$$

qui dépasse $1 - C$ de $\varepsilon = 0,063 < 0,2$.

On peut retourner le résultat et dire qu'une valeur asymptotique k_n de k est (n entier positif)

$$k_n = e^{n+1-C} , \quad \lim \frac{k}{k_n} = 1 .$$

On obtient ainsi approximativement

$$k = 227 , \quad k = 615 , \dots$$