

# SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER

Autor(en): **Appell, Paul**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21244>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ce sur quoi l'on ne reviendra jamais assez, c'est l'influence morale, affective, qu'eut Paul Appell sur plusieurs générations de mathématiciens, influence que d'ailleurs il possède toujours. A cet égard, il est unique. Les éloges qu'on lui décerne maintenant et même depuis fort longtemps en écraseraient beaucoup d'autres; vis-à-vis de lui, rien de plus naturel, car on a conscience qu'on ne lui rendra jamais complètement toute la sympathie qu'il rayonnait autour de lui et qui a éclairé tant d'esprit et tant de cœurs. De plus, ce grand homme a souffert; renvoyons aux *Souvenirs d'un Alsacien* (1858-1922) ceux qui ne seraient pas encore complètement éclairés, sur les déchirements d'une âme de frère et de patriote, et répétons que le 12 juin 1927 fut une grande date, un jour de grande fête pour ceux qui croient à la reconnaissance d'une nation et au rôle lumineux de qui nous fit aimer l'Effort.

---

## SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA CONSTANTE D'EULER

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

---

On a, en désignant par  $h$  un entier positif quelconque et par  $C$  la constante d'Euler,

$$C + \log h = H(h) + S(h) . \quad (1)$$

Le logarithme est népérien. On a fait

$$H(h) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h-1} ,$$

$$S(h) = (h-1)! \left[ \frac{p_2}{h!} + \frac{1! p_3}{(h+1)!} + \frac{2! p_4}{(h+2)!} + \dots \right]$$

avec

$$p_{v+1} = \int_0^1 \frac{x(1-x) \dots (v-1-x)}{v!} dx .$$

La fonction  $S(h)$  a été donnée, par M. J. Ser, dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2<sup>me</sup> Série, t. IV, 1925, p. 127). On a évidemment

$$S(h) < \frac{1}{h}(p_2 + p_3 + \dots)$$

et, en remplaçant la parenthèse par la valeur 1 donnée par M. Ser,

$$S(h) < \frac{1}{h}.$$

Comme il est d'usage, nous appellerons  $E(x)$  le plus grand entier contenu dans  $x$ . Quand  $h$  croit indéfiniment,  $H(h)$  et  $EH(h)$  qui n'est jamais égal à  $H(h)$  [Voir *Journal de Mathématiques*, 1927, p. 156] croissent indéfiniment.

Soit  $k$  une des valeurs entières de  $h$  telles que,  $h$  variant de  $k - 1$  à  $k$ , la partie entière  $EH(h)$  de  $H(h)$  augmente de 1. Comme la même opération fait croître  $H(k)$  de  $\frac{1}{k-1}$ , on a évidemment

$$H(k) - EH(k) < \frac{1}{k-1}$$

car

$$H(k) - H(k-1) = \frac{1}{k-1}, \quad EH(k) > H(k-1).$$

Mais, pour  $k \geq 5$ ,

$$E[H(k) + S(k)] = EH(k),$$

car  $H(k) + S(k)$  diffère d'un entier  $n$  de moins de

$$\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

et  $H(k)$  du même entier  $n$  de moins encore, ces excès étant donc tous deux moindres que 1:2.

On a

$$C + \log k = H(k) + S(k) \tag{2}$$

d'où, en prenant les parties entières,

$$E(C + \log k) = EH(k).$$

Il serait absurde de supposer, pour un seul  $k \geq 5$ ,

$$E(C + \log k) = E(\log k)$$

car alors on aurait

$$E(\log k) = EH(k)$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) = H(k) - EH(k) + S(k)$$

ce qui donnerait

$$C + \log k - E(\log k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{5};$$

alors  $C$  serait ou négatif ou moindre que  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$  c'est-à-dire moindre que  $\frac{1}{2}$  ce qui est inadmissible. On a donc, pour tous les  $k$ ,

$$E(C + \log k) = E(\log k) + 1,$$

$$E(\log k) + 1 = EH(k),$$

d'où, en retranchant de (2),

$$C + \log k - E(\log k) - 1 = H(k) - EH(k) + S(k) < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$$

et

$$1 - C = \log k - E(\log k) - [H(k) - EH(k) + S(k)] = \log k - E(\log k) - \varepsilon$$

si

$$\varepsilon < \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}.$$

Alors, si  $k$  augmente indéfiniment,

$$C - 1 + \log k - E(\log k) = 0,$$

$$1 - C = \lim [\log k - E(\log k)],$$

$k$  étant tel que la partie entière de  $H(h)$  croisse de 1 quand  $h$  varie de  $k-1$  à  $k$ . La différence  $1 - C$  est alors la limite de la partie décimale de  $\log k$ , l'erreur étant moindre que  $\frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}$ .

Pour  $k = 5$ ,

$$H(5) = 2 + \frac{1}{12}, \quad H(4) = 1 + \frac{5}{6};$$

l'erreur  $\varepsilon$  est, d'après la théorie générale, moindre que  $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ , elle est, en réalité,

$$\varepsilon = \frac{1}{12} + S(k) < \frac{1}{12} + \frac{1}{5} < \frac{3}{10} .$$

On peut aussi prendre  $k = 12$ ; alors l'erreur  $\varepsilon$  est moindre que

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{12} < \frac{2}{10} .$$

D'après Gauss (*Œuvres*, t. III), on a

$$C = -\Psi(0) = 0,5772 \dots , \quad 1 - C = 0,421 .$$

Pour  $k = 5$ ,

$$\log 5 - E(\log 5) = 0,609$$

qui dépasse  $1 - C$  de  $\varepsilon = 0,188 < 0,3$ .

Pour  $k = 12$ ,

$$\log 12 - E(\log 12) = 0,484$$

qui dépasse  $1 - C$  de  $\varepsilon = 0,063 < 0,2$ .

On peut retourner le résultat et dire qu'une valeur asymptotique  $k_n$  de  $k$  est ( $n$  entier positif)

$$k_n = e^{n+1-C} , \quad \lim \frac{k}{k_n} = 1 .$$

On obtient ainsi approximativement

$$k = 227 , \quad k = 615 , \dots$$