

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1927)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA THÉORIE DES GROUPES ET LA GÉOMÉTRIE
Autor: Cartan, E.
Kapitel: IX
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21253>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 09.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

les propriétés des figures contenant le plan de l'infini; on pourrait, du reste, imaginer une infinité de Géométries affines dans un même espace projectif, suivant le plan auquel on voudrait faire jouer le rôle du plan de l'infini. Si l'on est maintenant dans un espace projectif non holonome, les choses ne se passent plus de la même manière; pour qu'on puisse dans cet espace imaginer une Géométrie affine, il faut qu'on puisse y choisir des repères projectifs liés entre eux suivant une loi affine; pour cela, il est nécessaire et suffisant que le groupe d'holonomie de l'espace soit un groupe affine, ce qui n'arrive pas toujours. D'une manière générale, tout espace non holonome à groupe fondamental G , admettant pour groupe d'holonomie un sous groupe g de G , pourra être regardé comme un espace non holonome admettant pour groupe fondamental tout sous groupe de G contenant lui-même g comme sous-groupe. C'est ainsi qu'un espace de Weyl peut être regardé comme riemannien, si son groupe d'holonomie ne contient que des déplacements, sans homothétie.

IX

Comme on le voit, l'importance de la notion de groupe n'a pas été réduite par les développements récents de la Géométrie différentielle; il semble bien qu'elle seule au contraire soit capable de les embrasser dans une même synthèse. Je voudrais maintenant aussi brièvement que possible, donner un aperçu des services que peuvent rendre à la théorie des groupes elle-même les notions nouvelles de la Géométrie différentielle.

Considérons un groupe de transformations continu G à r paramètres a_1, a_2, \dots, a_r et représentons chaque transformation du groupe par un point (a_1, \dots, a_r) d'un espace à r dimensions, que nous appellerons l'espace du groupe. Dans un article récent ¹, nous avons, M. Schouten et moi, indiqué comment on pouvait doter cet espace de trois connexions affines remarquables intrinsèquement liées aux propriétés du groupe; j'ai développé plus longuement cette étude dans un mémoire qui vient de paraître ².

¹ E. CARTAN and J. A. SCHOUTEN, *On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups* (Proc. Akad. Amsterdam, 29, 1926; p. 803-815).

² E. CARTAN, *La Géométrie des groupes de transformations* (Journal Math., 6, 1927, p. 1-119).

Chacune de ces connexions fait de l'espace du groupe un espace affine non holonome. Deux de ces connexions sont *sans courbure*, ce qui, comme je l'ai déjà dit, signifie que le parallélisme des vecteurs y a une signification absolue. Leur définition est très simple. Rappelons que le produit de deux transformations dépend en général de l'ordre dans lequel elles sont effectuées, de sorte que l'opération inverse de la multiplication est possible de deux manières; on peut prendre comme quotient de deux transformations S' et S soit la transformation $S'S^{-1}$, soit la transformation $S^{-1}S'$. Cela posé un vecteur de l'espace du groupe est défini par les deux transformations S et S' que représentent son origine et son extrémité; deux vecteurs (S, S') et (T, T') seront dits équipollents de première ou de seconde espèce suivant qu'on aura

$$S'S^{-1} = T'T^{-1} \quad \text{ou} \quad S^{-1}S' = T^{-1}T';$$

chacune de ces espèces d'équipollence définit une des deux connexions sans courbure de l'espace du groupe; elles comportent au contraire chacune une torsion et ces deux torsions sont égales et opposées. Quant à la troisième connexion, elle est sans torsion, mais elle comporte une courbure, et l'équipollence de deux vecteurs ne peut s'y définir que de proche en proche.

Les géodésiques de l'espace du groupe sont les mêmes dans les trois connexions; elles sont liées aux sous-groupes à un paramètre du groupe donné; aux sous-groupes à plusieurs paramètres sont également liées des variétés *totale-ment géodésiques*, c'est-à-dire telles que toute géodésique qui y a deux de ses points y est contenue tout entière; mais il existe d'autres variétés totalement géodésiques que celles qui proviennent des sous-groupes de G , et elles jouent dans la théorie des groupes un rôle qu'on n'avait pas encore soupçonné.

Beaucoup de notions et de théorèmes fondamentaux de la théorie des groupes prennent de cette manière un caractère géométrique inattendu. C'est ainsi que les constantes de structure du groupe sont celles qui définissent la torsion de l'un quelconque des espaces sans courbure du groupe; deux groupes qui admettent le même espace sans courbure sont isomorphes. Au contraire, il peut arriver que deux groupes admettent le

même espace sans torsion sans être isomorphes; l'identité des espaces sans torsion de deux groupes définit par suite une sorte d'isomorphisme plus général que l'isomorphisme classique et qu'on pourrait appeler l'isomorphisme affine. On peut aussi définir un isomorphisme projectif en dotant l'espace du groupe d'une connexion projective liée au groupe d'une manière invariante.

Parmi les groupes continus, une classe est particulièrement importante, c'est celle des groupes simples ou semi-simples. Les espaces sans torsion de ces groupes sont riemanniens, avec un ds^2 qui n'est pas nécessairement défini. Ils font partie d'une catégorie plus générale d'espaces riemanniens, caractérisés par la propriété que le transport par parallélisme y conserve la courbure riemannienne. Chose curieuse, cette propriété est équivalente à la suivante, qui paraît de nature beaucoup moins restrictive: la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace est une transformation *isométrique*, c'est-à-dire laisse invariant le ds^2 de l'espace.

La détermination de tous les espaces de Riemann à ds^2 défini positif dont la courbure riemannienne est conservée par le transport parallèle peut être faite complètement¹; les plus généraux peuvent se déduire très simplement de certains d'entre eux, de dimensions moindres, et qui sont, en ce sens, *irréductibles*. Ce sont ces espaces de Riemann irréductibles qui nous ouvrent les vues les plus inattendues sur certains problèmes importants de la théorie des groupes simples, d'une part, sur des théories classiques de la Géométrie d'autre part. Je les désignerai pour abrégé sous le nom d'espaces \mathcal{E} .

X

Pour bien comprendre le rôle joué par les espaces \mathcal{E} , quelques remarques préliminaires sur les groupes simples ne seront pas inutiles. A chaque structure simple d'ordre r correspond d'abord

¹ Elle fait l'objet d'un mémoire récent (*Bull. Soc. Math.*, 54, 1926, p. 214-264, et 55, 1927, p. 114-134). V. aussi E. CARTAN, *Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallélisme conserve la courbure* (*Rend. Acc. Lincei*, 6^{me} série, 31, 1926, p. 544-547).