

# SUR LA REPRÉSENTATION DES GROUPES CONTINUS

Autor(en): **Weyl, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21254>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SUR LA REPRÉSENTATION DES GROUPES CONTINUS <sup>1</sup>

PAR

H. WEYL (Zurich).

---

La *notion générale de groupe* est sortie par abstraction de celle de groupe de transformations: on en vint à envisager les transformations comme des éléments de nature absolument quelconque, et l'on ne retint que la loi selon laquelle deux transformations engendrent par leur succession, par leur composition, une nouvelle transformation. D'autre part on doit aussi, à partir d'un schéma de structure abstrait, pouvoir retomber sur les groupes concrets de transformations. La *réalisation* ou *représentation* d'un groupe abstrait consiste en ceci qu'à chacun de ses éléments  $s$ , on fait correspondre, dans l'espace des variables  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , une transformation  $E = E(s)$

$$x' = xE$$

et cela de telle façon qu'à la composition de deux éléments du groupe corresponde la succession des deux transformations qu'on leur associe

$$E(s) \cdot E(t) = E(s, t) \quad (1)$$

et qu'à l'élément unité  $O$  du groupe corresponde la transformation identique. (J'écris le symbole  $E$  de la transformation après les variables, afin que la composition des transformations puisse être lue de la façon la plus naturelle, c'est-à-dire de gauche à droite. On ne supposera pas que la réalisation soit fidèle, c'est-à-dire qu'à des éléments différents correspondent nécessai-

---

<sup>1</sup> Rédaction abrégée d'une conférence faite à la session du printemps de la Société mathématique suisse, le 7 mai 1927, à Berne. Traduite de l'allemand par F. GONSETH (Berne).

rement des transformations différentes aussi.) Le cas le plus simple est celui où les transformations en question sont linéaires et homogènes. E peut alors être aussi envisagée comme la matrice des coefficients de la transformation. C'est ordinairement dans ce cas seulement que s'emploie l'expression de représentation. On peut dire que les recherches sur la représentation des groupes finis telles qu'on les doit à CARTAN et à FROBENIUS forment le noyau de la théorie des groupes finis : consistant dans ses parties préparatoires en une série de résultats isolés et disparates, cette discipline ne prend la forme d'une théorie cohérente et profonde que grâce à la doctrine des représentations par les transformations linéaires. Dans cet exposé, je ne m'occuperai pas des groupes finis, mais des *représentations des groupes continus*. Il se présentera que, pour les groupes continus dont les éléments forment une variété close, on peut formuler une théorie analogue à celle des groupes finis. Les groupes les plus familiers et aussi, du moins pour la géométrie, les plus importants sont continus. Pensez, par exemple, au groupe des rotations de l'espace à 3 ou  $n$  dimensions ! Ce groupe est en même temps l'un des plus importants exemples de groupe clos. Un autre exemple est celui des transformations unitaires, des transformations linéaires et homogènes qui laissent invariante la forme-unité d'Hermite définie positive

$$x_1 \bar{x}_1 + x_2 \bar{x}_2 + \dots + x_n \bar{x}_n$$

(où la barre signifie le passage à la quantité imaginaire conjuguée).

Veillez dès maintenant je vous prie, porter un intérêt spécial aux groupes clos ; à la fin de mon exposé j'ajouterai quelques remarques concernant les groupes ouverts.

Si, dans l'espace  $\mathfrak{R}_n$  de la représentation, on passe (par une transformation linéaire A) à un autre système de coordonnées,  $E(s)$  se transforme en  $A^{-1} E(s) A$  ; nous ne regarderons pas comme véritablement différente de la primitive une représentation qui lui est ainsi *équivalente*. Si toutes les transformations  $E(s)$  du groupe transforment en lui-même un sous-espace  $\mathfrak{R}_m$  de  $\mathfrak{R}_n$  ( $0 < m < n$ ) la représentation est dite *réductible*. Elle *dégénère* (zerfällt !) ou est *complètement réductible* en une représentation

à  $m$ , et une à  $n - m$  dimensions si l'on peut engendrer  $\mathfrak{R}_n$  additivement à l'aide de deux espaces complémentaires  $\mathfrak{R}_m$  et  $\mathfrak{R}_{n-m}$  dont chacun soit transformé en lui-même par toutes les transformations du groupe. (Cette addition consiste en ceci que tout vecteur de  $\mathfrak{R}_n$  soit d'une seule façon la somme d'un vecteur de  $\mathfrak{R}_m$  et d'un vecteur de  $\mathfrak{R}_{n-m}$ .)

Tout groupe fini est complètement réductible, s'il est simplement réductible. Ceci veut donc dire qu'à tout sous-espace  $\mathfrak{R}_m$  invariant on peut adjoindre un second espace invariant  $\mathfrak{R}_{n-m}$  qui, avec le premier, engendre l'espace entier de la représentation  $\mathfrak{R}_n$ .

Je m'en vais vous rappeler quelques traits de la démonstration de ce théorème, qui fait voir que toute représentation peut être d'une seule façon décomposée en représentations irréductibles.

Dans le cas d'un groupe fini de transformations réelles orthogonales, en d'autres termes d'un groupe fini de rotations dans l'espace à  $n$  dimensions, la construction de l'espace complémentaire  $\mathfrak{R}_{n-m}$  est évidente: il est défini par la variété linéaire de tous les vecteurs perpendiculaires à  $\mathfrak{R}_m$ .

Les transformations orthogonales sont celles qui laissent invariante la forme quadratique unité. Mais toute forme quadratique définie positive peut être ramenée à cette forme unité, par un choix convenable du système de coordonnées. La propriété en discussion est donc vraie s'il existe une forme quadratique définie qui reste invariante pour toutes les transformations du groupe.

Si les coefficients de la transformation sont complexes, la forme quadratique est à remplacer par une forme d'Hermité définie. Mais comment obtient-on une forme pareille? Choisissons dans ce but une forme d'Hermité définie quelconque et soumettons-la à toutes les transformations  $E(s)$  qui correspondent aux éléments  $s$  de notre groupe fini. Additionnons enfin toutes les formes obtenues de cette façon: la somme est évidemment définie et invariante pour toutes les transformations  $E(s)$ .

Si l'on veut appliquer cette façon de raisonner aux groupes continus on aura naturellement, au lieu de la sommation finie, une intégration à effectuer. A cet effet, nous avons besoin d'un élément de volume sur la variété du groupe qui jouisse de certaines propriétés d'invariance. Car aussi pour les groupes finis, la mé-

thode ne conduit à un résultat que si l'on accorde lors de la sommation un certain poids à chacune des formes transformées: le poids 1.

A chaque élément  $a$  du groupe correspond une transformation bien déterminée de la variété du groupe en elle-même,  $s \rightarrow s'$ , et ceci par la formule  $s' = s \cdot a$ . Je les nomme les *translations* (à droite); dans son exposé M. Cartan vous a d'ailleurs déjà entretenu de ces translations<sup>1</sup>. On peut considérer en outre les translations à gauche  $s \rightarrow s' = a \cdot s$  et l'*inversion*  $s \rightarrow s' = s^{-1}$ .

Nous admettrons que la notion des éléments infinitésimaux, infiniment peu différents de l'élément unité  $o$  est applicable à notre groupe (différentiation du premier ordre, dans la théorie de LIE); si le groupe est à  $r$  paramètres, ces éléments infinitésimaux forment une variété linéaire à  $r$  dimensions; si l'on se sert de  $r$  d'entre eux comme base, nous entendrons, conformément à l'usage, par volume d'un parallépipède déterminé par  $r$  éléments infinitésimaux la valeur absolue du déterminant de leurs composantes. Nous obtenons alors une mesure du volume invariante pour les translations à droite si nous exigeons qu'un tel parallépipède en  $o$  conserve son volume si on le transporte en  $a$  par translation à droite. D'autre part, pour convenir à sa destination, cet élément de volume doit être invariant aussi pour les translations à gauche et pour l'inversion. Par bonheur ces deux dernières propriétés d'invariance sont, sur les variétés de groupes closes, une conséquence de la première dont nous sommes assurés par définition. Par suite du choix arbitraire de la base du groupe infinitésimal, notre mesure du volume n'est déterminée qu'à l'unité de mesure près. Supposons qu'on l'ait normée de telle façon que le volume total du groupe soit égal à 1.

*Pour les représentations des groupes finis clos, le théorème de la réductibilité complète est valable.* La supposition que le groupe est clos, permet avant tout d'intégrer sur la variété du groupe entière. Pour obtenir une forme hermitienne invariante pour la représentation donnée  $E(s)$ , on part d'une forme définie quelconque, on la soumet à toutes les transformations  $E(s)$  et l'on

<sup>1</sup> Ces translations à droite forment d'ailleurs une représentation fidèle du groupe.

intègre la forme obtenue et dépendante de  $s$ , à l'aide de notre mesure invariante du volume  $ds$ , sur le groupe entier. Si l'on prend soin d'introduire dans l'espace de la représentation un système de coordonnées convenable, la forme définie hermitienne invariante peut être ramenée à la forme unité, et toutes les  $E(s)$  sont *unitaires*. Le système de coordonnées est par là déterminé à une transformation unitaire près.

La *trace* de la matrice  $E(s)$ , c'est-à-dire la somme de ses composantes situées dans la diagonale principale se nomme le *caractère de la représentation*. L'importance du caractère provient du fait qu'il est indépendant du choix du système de coordonnées dans l'espace de la représentation; il ne change pas si l'on passe à une représentation équivalente. *Le caractère est une fonction de classe* (Klassenfunktion); on obtient la classe des éléments « conjugués » à  $s$  par l'expression  $t^{-1}st$  lorsqu'on fait parcourir à  $t$  tous les éléments du groupe; et par fonction de classe on entend une fonction qui prend la même valeur pour des éléments conjugués.

Prenons comme exemple de ce que nous venons d'exposer le groupe continu fermé le plus simple, celui des rotations d'un cercle sur lui-même

$$z' = e^{\pi i s} \cdot z$$

( $s$  est le paramètre réel du groupe, qui n'est d'ailleurs déterminé que mod. 1).

Ce groupe des transformations unitaires de l'espace à 1 dimension étant commutatif, il ne possède que des représentations à 1 dimension. Elles ont la forme:

$$x' = e^{2\pi i n s} \cdot x$$

où  $n$  est un entier quelconque. Le caractère correspondant est  $\chi(s) = e^{2\pi i n s}$ . On sait que ces fonctions forment un système orthogonal (et normal) dont s'occupe la théorie des *séries de Fourier*. Le théorème le plus important de cette théorie est celui qui dit que ce système est *complet*, lorsque  $n$  prend toutes les valeurs entières. Les fonctions  $\varphi_1(s)$ ,  $\varphi_2(s)$ , ... sont (normées et) orthogonales entre elles si l'on a:

$$\int \varphi_i(s) \bar{\varphi}_k(s) ds = \begin{cases} 1 & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

Dans l'espace de la fonction arbitraire  $x(s)$ , dans lequel chaque endroit du domaine de variabilité de  $s$  représente en quelque sorte une dimension, et où  $\int x(s) \bar{x}(s) ds$  peut être envisagée comme le carré de la « longueur » du « vecteur »  $x(s)$ , un tel système de fonctions est l'analogie d'un système de vecteurs orthogonaux dans un espace à une infinité de dimensions. Les composantes de  $x(s)$  par rapport à ce système orthogonal sont les coefficients de Fourier

$$\alpha_i = \alpha_i[x] = \int x(s) \bar{\varphi}_i(s) ds .$$

Comme, dans un triangle rectangle une cathète n'est jamais plus longue que l'hypoténuse, on a l'inégalité de Bessel :

$$\sum \alpha_i \bar{\alpha}_i \leq \int x(s) \bar{x}(s) ds .$$

Un système orthogonal (infini) est complet (c'est l'analogie d'un système de coordonnées cartésiennes) si dans cette expression le signe de l'égalité est à prendre pour toutes les fonctions continues.

Et maintenant je prétends que les propriétés d'être orthogonal et d'être complet que nous venons de rencontrer pour le système des représentations du groupe des rotations du cercle sont encore valables — une fois convenablement élargies — pour un groupe clos quelconque. Mais pour les groupes non commutatifs il nous faudra faire la différence entre les composantes des représentations et leurs caractères.

*Théorème général d'orthogonalité.* Les composantes d'une ou de plusieurs représentations irréductibles forment un système orthogonal. Plus précisément : Pour une représentation irréductible à  $n$  dimensions  $E(s) = || e_{ik}(s) ||$  on a les relations

$$\int e_{ik}(s) \bar{e}_{ix}(s) ds = \begin{cases} \frac{1}{n} & (i = \iota, \quad k = \chi) \\ 0 & (\text{dans tout autre cas}) \end{cases} . \quad (2)$$

Pour deux représentations irréductibles et inéquivalentes  $E(s)$  et  $E'(s)$  on a sans exception :

$$\int e_{ik}(s) \bar{e}'_{ix}(s) ds = 0 . \quad (3)$$

*Théorème général de fermeture: Les composantes de toutes les représentations irréductibles inéquivalentes forment un système orthogonal complet.*

En introduisant le « coefficient de Fourier » appartenant aux représentations  $E(s)$

$$A = A[x] = \int x(s) \bar{E}(s) ds = \|\alpha_{ik}\| \quad (4)$$

on a donc:

$$n \sum_{i,k=1}^n |\alpha_{ik}|^2 + \dots = \int |x(s)|^2 ds. \quad (5)$$

*Théorème spécial d'orthogonalité et de fermeture: Les caractères primitifs forment un système orthogonal qui est complet dans le domaine des fonctions de classes. Les caractères  $\chi(s)$ ,  $\chi'(s)$  d'une, resp. de deux représentations inéquivalentes vérifient les relations:*

$$\int \chi(s) \bar{\chi}(s) ds = 1 \quad \int \chi(s) \bar{\chi}'(s) ds = 0$$

et, si  $x(s)$  est une fonction de classe continue, avec

$$\alpha = \alpha[x] = \text{Trace } A[x] = \int x(s) \bar{\chi}(s) ds$$

comme coefficient de Fourier, alors on a la somme suivante, étendue à toutes les représentations inéquivalentes

$$|\alpha|^2 + \dots = \int |x(s)|^2 ds.$$

Quelle est la signification de la condition de fermeture pour un groupe fini ? Si ce groupe comprend  $k$  classes, il n'y a que  $k$  fonctions de classes linéairement indépendantes et par conséquent  $k$  caractères primitifs au plus; le théorème spécial certifie que dans ce cas il y a *exactement*  $k$  caractères primitifs, ou bien encore qu'il y a autant de représentations irréductibles que de classes dans le groupe. Le théorème général de fermeture fait voir par contre que la somme  $\sum n^2$  des carrés des dimensions des représentations irréductibles inéquivalentes, est égale à l'ordre du groupe. Pour démontrer ces théorèmes de fermeture, il faut avoir recours à une méthode de *construction* des représentations irréductibles;



car il n'est aucunement évident *a priori* qu'il existe même une seule représentation. Contrairement à ce qui se fait pour les groupes finis, cette construction doit partir, dans le continu, d'une fonction arbitraire  $x(s)$ , sans laquelle la condition de fermeture ne pourrait être formulée. Le chemin que nous avons suivi, un de mes élèves, M. F. PETER et moi, met le problème de la représentation en relation avec la théorie des équations intégrales.

Par suite de la condition (1) on a :

$$\int x(t) E(t^{-1}s) dt = \int x(t) E(t^{-1}) dt \cdot E(s) .$$

$E(t^{-1})$  est égale à  $E^{-1}(t)$  et cette dernière expression, parce que  $E(t)$  est unitaire, est à son tour égale à  $\overline{E}^*(t)$  (l'astérisque doit indiquer le passage à la matrice transposée). L'intégrale indépendante de  $s$  au membre de droite de l'équation précédente est donc la matrice transposée  $A^*$  du coefficient de Fourier de la formule (4). Quant au membre de gauche, remplaçons-y  $t$  par  $st^{-1}$  : si  $s$  reste fixe,  $st^{-1}$  décrit le groupe entier, en même temps que  $t$ , tandis que le volume  $dt$  reste inchangé. Nous obtenons :

$$\int x(st^{-1}) E(t) dt = A^* E(s) . \quad (6)$$

Un nombre  $\alpha \neq 0$  est dit *valeur fondamentale* et une fonction  $\varphi(s)$  *fonction fondamentale* correspondante du noyau  $k(s, t)$ , si l'on a :

$$\int k(s, t) \varphi(t) dt = \alpha \varphi(s)$$

(je nomme ici valeur fondamentale ce qui serait, selon la terminologie de Hilbert, l'inverse d'une valeur fondamentale). La signification de l'équation (6) peut donc être énoncée comme suit :  $E(s)$  est une fonction fondamentale du noyau

$$k(s, t) = x(st^{-1}) , \quad (7)$$

correspondant à la valeur fondamentale  $A^*$ . La valeur fondamentale aussi bien que la fonction fondamentale ne sont, il est vrai, pas des grandeurs scalaires, mais des matrices. On montre de façon semblable que

$$\int x(t^{-1}s) E(t) dt = E(s) A^* . \quad (6')$$

Nous avons par conséquent à appliquer la théorie des équations intégrales pour des noyaux (7), qui sont fonction de la seule variable  $st^{-1}$ . Nos formules montrent que les fonctions fondamentales de noyaux de ce genre sont (contrairement à ce qui se passe pour les valeurs fondamentales) au fond indépendantes de la loi fonctionnelle  $x(s)$ . A vrai dire, nous n'aurons véritablement le droit de le prétendre que lorsque nous aurons pu faire voir que ces noyaux ne possèdent pas d'autres fonctions fondamentales que celles que nous venons d'indiquer, et qui nous ont été fournies par les représentations irréductibles du groupe.

Remarquons tout d'abord que par composition nous ne quittons pas le domaine des noyaux de la forme spéciale (7). On définit la composition de deux noyaux comme celle de deux matrices :

$$k_1 k_2(s, t) = \int k_1(s, r) k_2(r, t) dr$$

et l'on a en effet

$$\int x(sr^{-1}) y(rt^{-1}) dr = xy(st^{-1})$$

en posant

$$\int x(sr^{-1}) y(r) dr = xy(s) . \quad (8)$$

La théorie des valeurs fondamentales des équations intégrales n'est de facile abord que dans le cas où le noyau  $k$  satisfait à la condition de symétrie d'Hermité :

$$k(t, s) = \bar{k}(s, t) .$$

Il est alors identique à son conjugué hermitien :

$$\tilde{k}(s, t) = \bar{k}(t, s) .$$

Le conjugué hermitien de (7) est  $\tilde{x}(st^{-1})$ , avec  $\tilde{x}(s) = \bar{x}(s^{-1})$ . Par la composition  $k\tilde{k}$  on obtient toujours un noyau hermitien  $K$ . Les valeurs fondamentales sont positives. La *trace* de  $K$

$$\int K(s, s) ds = \int \int |k(s, t)|^2 ds dt$$

est égale à la somme des valeurs fondamentales de  $K$ . Ce théorème fondamental de la théorie des équations intégrales s'obtient par

construction des valeurs et des fonctions fondamentales, de la façon la meilleure par la méthode de E. SCHMIDT (Dissertation. Göttingue, 1905).

Pour toute fonction  $x, y$ , on a pour le coefficient de Fourier  $A$  correspondant à une représentation :

$$A[xy] = A[x]A[y] \quad A[\tilde{x}] = \bar{A}^*[x] .$$

Par conséquent la matrice  $A(x)$  est hermitienne, si  $\tilde{x}(s) = x(s)$ ; elle peut alors, par un choix convenable du système de coordonnées orthogonal et normal dans l'espace de la représentation, être mise sous la forme d'une matrice diagonale (de composantes  $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ ). L'équation (6) dit alors que les fonctions

$$e_{i1}(s) , \quad e_{i2}(s) \dots e_{in}(s) \tag{9}$$

appartiennent comme fonctions fondamentales à la valeur fondamentale  $\alpha_1$ , au sens scalaire et habituel. Ceci doit être appliqué non au noyau (7), mais à  $K = k\tilde{k}$ . Le fait que ses fonctions orthogonales forment un système orthogonal, comme celles de tout noyau hermitien, est le fondement des théorèmes d'orthogonalité de la théorie des représentations. A la vérité, pour justifier complètement les équations (2) et (3) il faut encore avoir recours à l'irréductibilité. *Et le théorème fondamental de la théorie des équations intégrales, qui en général n'a rien de commun avec les conditions de fermeture fournit maintenant l'équation (5), où la somme indiquée par les points ... ne doit être étendue tout d'abord qu'aux représentations fournies par les fonctions fondamentales du noyau  $K$  <sup>1</sup>. Mais à cause de l'inégalité de Bessel le résultat ne change pas, si l'on tient compte par la suite des représentations irréductibles inéquivalentes restantes. Ce sont, comme on peut le voir en même temps, toutes celles pour lesquelles le coefficient de Fourier  $A[x]$  s'annule, et celles-là seulement.*

Mais tout cela n'est juste qu'à la condition que *toutes* les fonctions fondamentales apparaissent comme composantes de l'une

---

<sup>1</sup> Car les  $n$  composantes de la matrice diagonale  $\Gamma = A[x\tilde{x}] = A \cdot \bar{A}^*$  sont des valeurs fondamentales  $n$ -tuples, avec les fonctions fondamentales (9); ce qu'elles fournissent à la somme des valeurs fondamentales est donc  $n$ . Trace  $\Gamma = n$ . Trace  $(A\bar{A}^*)$ .

ou l'autre des représentations irréductibles. C'est ici qu'intervient la seconde idée de la démonstration, après que les relations avec une équation intégrale aient été établies par (6). Si  $\varphi(s)$  est une fonction fondamentale appartenant à la valeur fondamentale  $\gamma$ , il en est de même, à cause de la forme spéciale de notre noyau

$$K(s, t) = z(st^{-1})$$

pour la fonction  $\varphi(sa)$  —  $a$  étant un élément quelconque du groupe. Si

$$\varphi_1(s), \varphi_2(s) \dots \varphi_n(s)$$

sont toutes les fonctions fondamentales linéairement indépendantes appartenant à  $\gamma$ , les fonctions  $\varphi_i(st)$  doivent donc, pour un  $t$  constant être des combinaisons linéaires des  $\varphi_i(s)$ , avec des coefficients constants, c'est-à-dire fonctions de  $t$  seulement.

$$\varphi_i(st) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(s) e_{ki}(t); \quad (10)$$

ou bien, avec la façon d'écrire du calcul des matrices

$$\varphi = \|\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\| \quad E = \|e_{ik}\|$$

$$\varphi(st) = \varphi(s) E(t).$$

En termes explicites: Si l'on compose par multiplication à droite l'argument  $s$  et l'élément du groupe fixe  $t$ , le système des fonctions  $\varphi(s)$  subit la transformation linéaire  $E(t)$ . Il en résulte immédiatement

$$E(t) E(t') = E(tt') \quad E(\circ) = 1$$

et nous avons ainsi obtenu une représentation. D'ailleurs les fonctions  $\varphi(s)$  peuvent être normées de façon à former un système orthogonal et normal. Comme cette propriété ne se perd pas, si l'on multiplie à droite l'argument  $s$  par l'élément du groupe fixe  $t$ ,  $E(t)$  est alors pour tout  $t$  une matrice normale (unitaire). Enfin, il se vérifie aussi que les fonctions  $\varphi(s)$  sont elles-mêmes comprises dans les composantes de la matrice  $E(s)$  ou du moins

— ce qui seul importe — en sont une combinaison linéaire. Car si nous faisons  $s = \circ$  dans (10), nous trouvons :

$$\varphi_i(t) = \sum_k \varphi_k(\circ) e_{ki}(t) .$$

Qu'il me soit encore permis de comparer la méthode que je viens d'esquisser brièvement avec celle qu'ont employée FROBENIUS et d'autres auteurs dans le cas des groupes finis. Pour un groupe fini, on peut disposer de la fonction  $1(s)$ , qui s'annule partout sur la variété du groupe excepté au point-unité  $s = \circ$ , où elle prend comme valeur l'ordre du groupe. Cette fonction, si on la compose d'après (8), avec une fonction quelconque  $x(s)$ , a les propriétés de l'unité:  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ . Par spécialisation, c'est-à-dire si l'on applique la méthode exposée ici à la fonction  $1(s)$  et non à toutes les fonctions  $x(s)$  possibles, on retrouve l'ancienne méthode. Cela suffit en effet pour engendrer toutes les représentations irréductibles. Souvenons-nous qu'une fonction particulière  $x(s)$  fournit toutes les représentations, pour lesquelles le coefficient de Fourier correspondant  $A[x]$  ne s'annule pas ! Mais le coefficient de Fourier  $A[1]$  de la fonction  $1(s)$  est la matrice-unité, et par conséquent  $\neq 0$ . Sur une variété de groupe continue, la fonction unité  $1(s)$  si commode manque malheureusement ; nous ne pouvons que nous en rapprocher par un processus infini. Qu'on établisse en effet une suite infinie de fonctions  $1_\nu(s)$ , ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) qui aient 1 comme valeur moyenne sur la variété du groupe, mais qui ne soit différentes de zéro que dans un petit entourage du centre  $\circ$ , entourage qui se réduise progressivement à  $\circ$  lui-même lorsque  $\nu$  augmente indéfiniment. Le coefficient de Fourier  $A[1_\nu]$  correspondant à une représentation quelconque converge vers la matrice unité, et est par conséquent, pour  $\nu$  suffisamment grand, différent de zéro. C'est pourquoi notre méthode, appliquée aux fonctions  $x(s)$  de la suite  $1_\nu(s)$  doit finir par fournir toutes les représentations irréductibles.

La méthode de construction que nous avons suivie est une méthode transcendante basée sur une intégration étendue au groupe entier. Des intégrations de ce genre furent employées tout d'abord par A. HURWITZ pour engendrer des invariants de groupes ; en s'en servant, I. SCHUR démontra les conditions

d'orthogonalité pour les représentations du groupe des rotations. Le problème de la constitution des groupes aussi bien que celui de leur représentation par des matrices se transforme en un problème purement algébrique, si l'on se base sur les seuls *éléments infinitésimaux* du groupe, qui d'après S. LIE engendrent celui-ci (il est vrai que la *topologie du groupe* dans son ensemble y doit jouer alors un rôle décisif). C'est par des procédés algébriques de ce genre que *Cartan*, dans des travaux d'une pénétration extraordinaire et dignes d'admiration, mais aussi fort laborieux, a obtenu tous les groupes semi-simples de structures différentes, et a calculé spécialement pour chacun des types obtenus les représentations irréductibles. S'il est vrai que cette façon de faire fournit quelques traits de détail qu'on ne peut déduire sans autre de la méthode transcendante, cette dernière n'en a pas moins de grands avantages: elle fournit les résultats essentiels avec une grande généralité sans qu'il soit besoin de connaître les types de structure, et sans les calculs pénibles qu'il faut recommencer pour chaque cas particulier. Et sur certains points essentiels, elle va plus loin que la méthode algébrique; par les moyens algébriques on n'est en effet pas encore parvenu à démontrer le théorème central de la réductibilité complète. En outre, à l'aide des conditions d'orthogonalité et de fermeture, on pourrait explicitement calculer les caractères primitifs de tous les groupes semi-simples, comme nous l'avons montré, I. SCHUR et moi, dans plusieurs travaux. Nos théorèmes généraux ont donc une valeur véritable; ils vont si bien au fond des choses qu'ils permettent, dans les cas particuliers les plus importants, de déterminer explicitement les grandeurs dont ils traitent. Il n'y a guère d'espoir de jamais obtenir par les méthodes algébriques les formules qui précèdent pour les caractères, formules tout à fait remarquables, élégantes et pleines de conséquences.

Aux groupes semi-simples appartient d'abord le groupe des rotations, mais aussi le groupe de toutes les transformations linéaires homogènes à  $n$  dimensions de déterminant 1. Le premier est fermé; le second ne l'est pas. Pour les buts de la théorie de la représentation, un groupe semi-simple peut être toujours remplacé par un groupe fermé, à l'aide de la *restriction unitaire* (*unitäre Beschränkung*). Ce fait important qui se déduit de la

structure des groupes a permis de se rendre maître des groupes semi-simples par la méthode d'intégration.

Si on les applique au groupe commutatif fermé à un paramètre des rotations d'un cercle, nos idées contiennent une démonstration de la *formule de Parseval*, c'est-à-dire de la condition de fermeture pour le système orthogonal de Fourier

$$e^{2\pi i n s} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Et même dans ce cas particulier, notre méthode est supérieure aux méthodes anciennes et classiques de la théorie des séries de Fourier, car elle permet, comme je le crois, de se rendre compte pour la première fois des véritables raisons de la validité de la formule de Parseval. J'en vois une confirmation dans le fait qu'elle put être appliquée aussi sans modification au cas traité dernièrement par H. BOHR des *fonctions presque périodiques*. Dans le langage de la physique, il s'agit de décomposer un phénomène, caractérisé par une fonction de la variable réelle  $s$ , en oscillations simples, de fonctions  $e^{i\lambda s}$  (où l'on n'exige plus comme dans l'analyse harmonique, que les  $\lambda$  soient des multiples entiers d'une fréquence fondamentale). Du point de vue de la théorie des groupes, il s'agit ici du *groupe des translations d'une droite sur soi-même*: les éléments du groupe sont les nombres réels  $s$ , la loi de composition est l'addition. Toutes les oscillations simples sont des caractères, même si la fréquence  $\lambda$  est non seulement réelle, mais complexe. Mais c'est seulement dans le cas où l'on limite la notion de fonction à celle de fonction presque périodique que la loi de fermeture reste en valeur; et justement c'est par cette restriction que les fréquences non réelles sont écartées. *La théorie de Bohr des fonctions presque périodiques est par conséquent le premier exemple relatif à la théorie des caractères d'un groupe véritablement ouvert*. Nous obtenons ici tout un ensemble continu de caractères. Cet exemple nous montre évidemment que, pour les groupes ouverts, le problème fondamental ne consiste pas à établir les circonstances compliquées qui, faisant échec au théorème de la réductibilité complète, viennent remplacer les lois simples et claires valables pour les groupes clos, mais bien de chercher à sauver ces lois par des restrictions appropriées apportées à la notion de fonction.