

# Chapitre Premier. Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1927)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

inégalités, les ensembles étudiés pouvant de ce fait présenter une généralité beaucoup plus grande que les ensembles tombant sous le coup des considérations de M. Hausdorff, une moins grande homogénéité dans la structure se trouvait requise et par là, je me rapprochais du caractère presque complètement arbitraire des ensembles formant la frontière d'un domaine pour lequel on cherche à résoudre le problème de Dirichlet, par exemple.

Ces remarques permettront d'apercevoir de prime abord l'esprit dans lequel est rédigé le présent travail. Dans un premier chapitre, pour accoutumer le lecteur à la considération du nombre dimensionnel, nous avons formé différents exemples, aussi simples que possible, et qui de ce fait même, se rapportent à des ensembles partitifs. Ces exemples, intéressants par eux-mêmes, montrent notamment que les courbes rectifiables ne sont qu'un cas particulier d'une famille de courbes beaucoup plus générales, douées d'une métrique, fournissant une représentation intrinsèque.

Dans le second chapitre, nous montrons que la considération du nombre dimensionnel d'un ensemble permet, d'une manière incomplète, mais suffisante dans beaucoup d'applications, de caractériser les ensembles impropres du problème de Dirichlet : on étudie pour cela l'allure du potentiel produit par une répartition de masses, placée sur l'ensemble donné, au voisinage de ces masses ; on obtient ainsi deux théorèmes (A et B), qui sont la contrepartie l'un de l'autre (sans qu'il y ait toutefois réciprocity). Malgré quoi, ces théorèmes sont souvent décisifs. Nous verrons en outre, en les appliquant aux exemples précédemment étudiés, qu'ils nous conduiront à des remarques importantes, relatives à la convergence de certaines intégrales dont l'élément devient infini (n° 13).

## CHAPITRE PREMIER.

### *Ensembles, lignes et surfaces ayant des nombres dimensionnels variés.*

3. — Pour donner accès aux considérations que nous allons exposer, il est opportun de présenter d'abord quelques exemples à la suite desquels apparaîtra mieux l'utilité des notions que nous aurons à introduire.

Nous avons déjà cité au n° 1 l'ensemble triadique de Cantor et avons montré comment une remarque de similitude permet immédiatement de prévoir son nombre dimensionnel.

C'est encore de remarques du même genre que prendront naissance les exemples qui vont suivre et où nous considérerons, au lieu d'ensembles partout discontinus, des lignes et des surfaces de Jordan. Toutefois, avant de passer à des continus, indiquons quelques suggestions émanant de l'exemple précédent.

Envisageons un parallépipède rectangle construit sur trois vecteurs (deux à deux orthogonaux) OA, OB, OC. Sur OA comme base, avec  $\lambda$  pour rapport d'ablation (= rapport du segment enlevé au segment initial), construisons un premier ensemble triadique ( $\alpha$ ); faisons de même sur OB et sur OC comme bases, avec des rapports d'ablation respectivement égaux à  $\mu$  et  $\nu$ . Soient ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) les ensembles ainsi obtenus; soit E l'ensemble des points projetés sur OA en quelque point de ( $\alpha$ ), sur OB en quelque point de ( $\beta$ ), sur OC en quelque point de ( $\gamma$ ). Lorsque  $\lambda = \mu = \nu$ , l'ensemble E appartient encore à la classe des ensembles partitifs admettant une infinité de sous-ensembles, de diamètre arbitrairement petit, semblables à l'ensemble total. On trouve ainsi son nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{3 \log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}}$$

si  $\lambda, \mu, \nu$  sont distincts, l'ensemble E n'appartient plus à la classe précédente, mais à une classe plus vaste obtenue en substituant à la similitude une transformation linéaire. Il serait cependant facile, après avoir imposé au nombre dimensionnel de E, que nous désirons définir, quelques postulats géométriques très simples, de trouver sa valeur qui est ici

$$\delta = \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\lambda}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\mu}} + \frac{\log 2}{\log \frac{2}{1-\nu}}$$

En utilisant un autre mode de définition, ce fait sera d'ailleurs justifié plus loin (n° 12).

4. — Occupons-nous maintenant des lignes de Jordan. Il va sans dire qu'une ligne rectifiable, dans la théorie qui nous occupe,

devra jouer le rôle d'un ensemble partitif et avoir pour nombre dimensionnel l'unité.

Nous allons montrer la possibilité de définir des lignes dont le nombre dimensionnel surpasse l'unité. Dans ce but, nous utiliserons justement les mêmes remarques de similitude que précédemment. Nous définirons les courbes en question au moyen d'une suite de lignes polygonales inscrites: soit  $L_k$  la ligne polygonale inscrite d'ordre  $k$ ; nous nous conformerons aux conditions suivantes:

1° Les sommets de  $L_k$  sont aussi des sommets de  $L_{k+1}$ , quel que soit  $k$ .

2° La figure formée par un côté de  $L_k$  et le tronçon de  $L_{k+1}$  substitué à ce côté est définie à une similitude près.

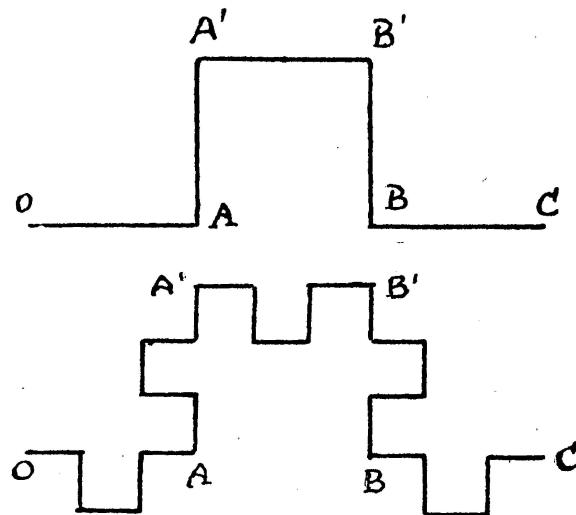


Fig. 1.

Par exemple, on divise l'unité de longueur  $OC$  (choisie pour  $L_1$ ) en trois parties égales  $OA = AB = BC$ ; sur  $AB$  on construit un carré; soit  $A'B'$  le côté opposé à  $AB$ ; d'un côté de  $L_k$ , on passe au tronçon associé de  $L_{k+1}$  par une construction semblable à celle qui remplace  $OC$  par  $OA A' B' BC$ : ce contour polygonal sera justement notre ligne  $L_2$ ; au-dessous de lui, sur le dessin ci-contre, nous avons représenté  $L_3$ . On imagine ainsi facilement une succession de lignes crénelées tendant vers la courbe, et d'après le processus qui permet leur obtention, on pourra définir sur cette courbe des arcs d'étendue égale. La définition sera immédiate pour les arcs dont les extrémités ont été obtenues

comme sommets de lignes inscrites; ces sommets formant un ensemble partout dense sur la courbe en question, on passera facilement de ce cas particulier au cas général.

Notre courbe possède donc une métrique propre et, par suite, on peut y définir une répartition uniforme de masses. On voit de plus que lorsqu'on partage en 3 parties égales l'étalon de longueur OC, l'étalon associé d'étendue sur notre courbe (c'est-à-dire la totalité de celle-ci) se subdivise en 5 parties égales. Nous en déduisons comme précédemment que cette étendue se rapporte au nombre dimensionnel

$$\delta = \frac{\log 5}{\log 3} .$$

5. — Le processus que nous venons d'indiquer peut être varié de différentes manières, en conservant les deux conditions de liaison de  $L_{k+1}$  à  $L_k$ . Nous nous dispenserions d'insister s'il ne nous semblait intéressant d'attirer l'attention sur des cas particuliers qui se présentent dans cette théorie et qui en font mieux comprendre les aspects variés.

Prenons encore pour  $L_1$  l'unité de longueur OC et partageons-la en 3 parties égales  $OA = AB = BC$ . Nous supposons que  $L_2$  est une ligne gauche, que nous avons représentée sur le dessin ci-contre en perspective: cette ligne a 9 côtés et la figure formée

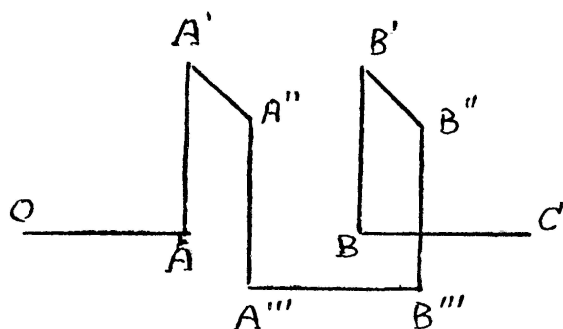


Fig. 2.

par A, B et les 6 sommets interpolés entre eux est un cube. Nous pouvons répéter sur cet exemple tout ce que nous avons dit à propos du précédent: le nombre dimensionnel aura ici pour valeur

$$\delta = \frac{\log 9}{\log 3} = 2 .$$

Cet exemple nous suggère l'existence de continus possédant un même nombre dimensionnel malgré leurs structures très différentes; tel est le cas du continu précédent d'une part, de l'ensemble des points d'un carré, d'autre part.

A cette occasion, remarquons que l'exemple indiqué au n° 3 permettrait d'obtenir des ensembles parfaits discontinus de nombre dimensionnel égal ou bien à 1, ou bien à 2: ces ensembles sont réalisés, dans un espace à 3 dimensions. Dans la théorie de la mesure de M. Lebesgue les ensembles parfaits discontinus mesurables en volume (auxquels on devra attribuer un nombre dimensionnel égal à 3) sont classiquement connus.

6. — Dans les exemples de courbes donnés au n°s 4 et 5, on peut disposer des indéterminées (subsistant aux conditions qui lient  $L_{k+1}$  à  $L_k$ ) de manière à ce que les lignes obtenues soient sans point double.

D'ailleurs, la présence de points doubles serait ici sans importance. Il y a un exemple classique où de tels points existent et qu'on peut rattacher à nos considérations actuelles: c'est celui

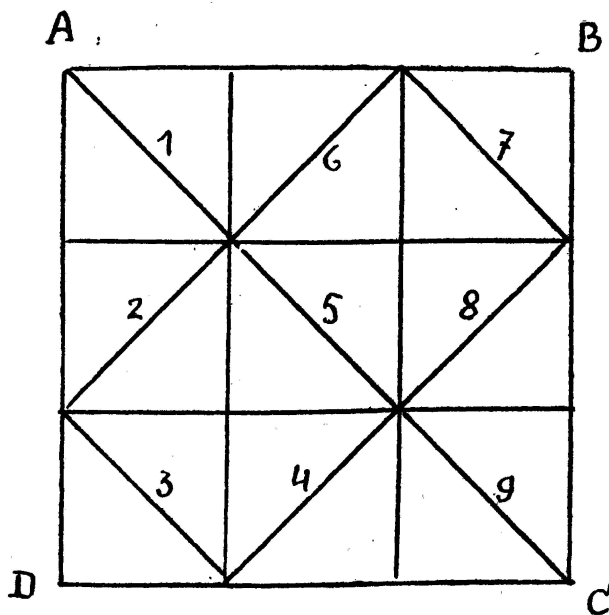


Fig. 3.

de la courbe de Peano. On obtient en effet une telle courbe par une construction respectant les deux conditions du n° 4. Soit ABCD un carré de côté égal à l'unité de longueur. On partage encore l'unité en trois parties égales, si nous prenons pour  $L_1$  la

diagonale AC du carré, la seconde ligne polygonale inscrite  $L_2$  sera formée avec des diagonales de nos carrés divisionnaires, prises dans l'ordre de succession indiqué par la figure. Pour passer d'une ligne inscrite à la suivante, on fera toujours sur chaque côté, à une similitude près, la même construction. Finalement, nous pourrions encore (quelque paradoxal que cela puisse sembler) définir sur la courbe de Peano ainsi construite des arcs de même étendue: on commencera par le cas, immédiatement résolu, d'arcs ayant leurs extrémités en des nœuds du réseau progressif, obtenu à partir du carré par subdivision ternaire indéfini, on passera encore de là au cas général en remarquant que l'ensemble des nœuds précédents est partout dense sur la courbe de Peano. Bien entendu, le nombre dimensionnel est ici égal à 2.

6 bis. — Partant de la courbe étudiée au n° 4 ou de la courbe de Peano étudiée au n° 6, on pourrait en déduire dans l'espace des lignes analogues aux hélices. Soit M un point d'une de nos courbes planes: menant en M la perpendiculaire au plan de la courbe, on porterait sur cette perpendiculaire une longueur proportionnelle au paramètre qui définit d'une manière intrinsèque la position du point M sur la courbe. Il est facile de voir que les lignes brisées inscrites dans cette hélice généralisée, projetées sur le plan de la courbe initiale suivant les lignes  $L_n$  respectent les conditions auxquelles nous nous sommes conformés dans la construction de ces lignes. Il s'ensuit que l'on peut aussi définir sur ces hélices des répartitions uniformes de masses et que la projection d'une répartition uniforme sur l'hélice est encore une répartition uniforme sur la courbe initiale: l'hélice aura un nombre dimensionnel égal à celui de la courbe initiale <sup>1</sup>.

7. — Les mêmes considérations permettent d'obtenir des surfaces de Jordan qui sont des ensembles partitifs dont les nombres

---

<sup>1</sup> Les résultats obtenus ici apportent, dans des cas particuliers, une contribution à ce problème:

Trouver une représentation paramétrique intrinsèque (c'est-à-dire invariante par le groupe des déplacements) d'une courbe de Jordan.

Ce problème a été résolu dans un tout autre sens, mais avec une entière et remarquable généralité par M. Maurice Fréchet (*Journ. de Math.*, t. 4, 1925, p. 281-297).

dimensionnels pourront prendre des valeurs variées. Nous définirons ces surfaces comme limites de suites de surfaces polyédrales, qui pour fixer les idées, respecteront les conditions suivantes :

1° Chaque surface polyédrale  $\Sigma_k$  de notre suite a des facettes rectangulaires semblables, dont chaque arête est parallèle à l'un des trois axes de coordonnées (choisis orthogonaux);

2° Les sommets de  $\Sigma_k$  sont encore sommets de  $\Sigma_{k+1}$ ;

3° La figure formée par une facette de  $\Sigma_k$  et la figure polyédrale qui lui est substituée dans  $\Sigma_{k+1}$  est définie à une similitude près.

Par exemple, partant d'un carré (qui sera  $\Sigma_1$ ) nous subdivisons son arête en 3 parties égales, puis le carré se trouvant ainsi partagé en 9 autres, nous laisserons subsister ceux qui sont situés aux 4 coins et le carré central, les 4 autres se trouvant remplacés

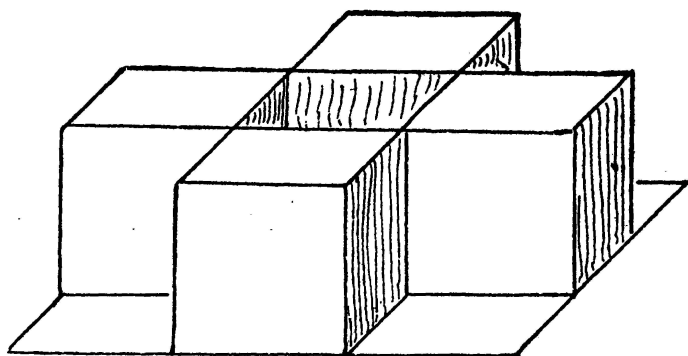


Fig. 4.

par des assemblages de facettes tels que chaque assemblage forme un cube avec la facette qu'il remplace: nous avons représenté ci-contre la forme de la surface  $\Sigma_2$  ainsi obtenue. Cela posé, en itérant indéfiniment cette opération, nous pourrions obtenir une portion de surface, image topologique d'un carré: sur cette surface, on pourra définir des étendues égales, délimitées par des lignes fermées simples de Jordan: cela sera immédiat lorsque ces lignes seront des lignes brisées empruntant leurs arêtes aux facettes des surfaces polyédrales  $\Sigma_k$ . Comme toute ligne de notre surface finale est d'ailleurs la limite de telles lignes brisées, on généralise aisément la notion de l'étendue délimitée par une courbe simple de la surface, en spécifiant par exemple qu'il



s'agit soit du domaine ouvert, soit du domaine fermé qu'elle délimite. Cette étendue sera comparée à celle de la surface totale, prise pour unité (par exemple). Lorsqu'on subdivise l'unité de longueur en 3 parties égales, l'étalon de l'étendue actuellement considérée se subdivise en 25 parties égales. Le nombre dimensionnel est donc ici

$$\delta = \frac{\log 25}{\log 3} = 2 \frac{\log 5}{\log 3} \quad \left( < \frac{\log 27}{\log 3} \right)$$

Indiquons sans insister qu'on pourrait beaucoup varier les considérations précédentes, et à l'exemple de ce que nous avons vu au n° 4, tirer parti de transformations linéaires qui supplanteraient les similitudes intervenues ici.

## CHAPITRE II.

*L'allure d'un potentiel au voisinage de l'ensemble potentiel.*

*Application au problème de Dirichlet.*

8. — Au cours des travaux récents sur le problème de Dirichlet, on a pris l'habitude de raisonner avec le maximum de généralité; on formule l'énoncé de la manière suivante:

Soit un domaine ouvert  $\Omega$  (c'est-à-dire exclusivement composé de points intérieurs) tout entier à distance finie; soit  $\Sigma$  la frontière de ce domaine, dont on sait seulement:

- 1° Qu'elle constitue un ensemble fermé;
- 2° Qu'elle comprend nécessairement un continu externe.

On donne une fonction continue  $f(Q)$  sur l'ensemble fermé  $\Sigma$ , et on cherche à trouver une fonction  $F(P)$ , harmonique dans  $\Omega$ , et possédant en général, en chaque point de  $\Sigma$ , une valeur limite unique égale à  $f(Q)$ , l'ensemble des points exceptionnels étant aussi raréfié que possible.

J'ai présenté une étude détaillée de ce problème, envisagé avec ce degré de généralité dans mon mémoire des Annales de la Société Polonaise de Mathématique (t. IV, année 1925, p. 59-112), qui est en même temps la rédaction des leçons que j'ai faites sur cette question, pendant le dernier trimestre de 1925, à l'Université de Cracovie.