Le cas de $B = 0$, avec $s = 2$ et A carré, présente cette particularité intéressante de représenter la solution du problème suivant : *détermination de tous les triangles héroniens ayant un côté donné et une aire imposée.* J'étudierai la question prochainement.

Cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques.

23. — L'expression du discriminant Δ des fonctions elliptiques, abstraction faite du facteur double $As + B$, qui ne saurait être nul sans dégénérescence de l'homographie, se présente sous forme d'un polynome du second degré seulement par rapport au paramètre B. Les deux autres paramètres A et s étant supposés donnés, rationnels et quelconques, l'équation $\Delta = 0$ n'a des racines rationnelles en B que si $s^2 + 12$ A est un carré. En introduisant un nouveau paramètre rationnel et arbitraire, ω, cette dernière condition est satisfaite de la manière la plus générale en prenant :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} ;$$

d'où l'expression correspondante du discriminant :

$$\Delta = -27(As + B)^2(B - B_1)(B - B_2) ,$$

avec :

$$4.27B_1 = s^3 - 3\omega^2 s - 2\omega^3 = (s + \omega)^2.(s - 2\omega) ,$$

$$4.27B_2 = s^3 - 3\omega^2 s + 2\omega^3 = (s - \omega)^2.(s + 2\omega) ;$$

$$27(B_2 - B_1) = \omega^3 .$$

Le changement de signe sur ω produit l'échange des valeurs de B_1 et B_2; en supposant que ω peut prendre toutes les valeurs rationnelles et algébriques, le discriminant Δ s'annule donc lorsque les coefficients A et B sont de la forme générale suivante :

$$A = \frac{\omega^2 - s^2}{12} , \qquad B = \frac{1}{108}(s - \omega)^2.(s + 2\omega) ,$$

alors:

$$108 g_2 = \omega^2(\omega + 2s)^2 ,$$
$$8.3^6 g_3 = - \omega^3(\omega + 2s)^3 ,$$
$$\Delta = 0$$

$$As + B = \frac{1}{54}(\omega - s)(\omega + 2s)^2 ,$$

$$Bs - 2A^2 = - \frac{1}{8.27}(\omega - s)^2.(s^2 + 2\omega s + 3\omega^2) ,$$

$$s^2 + 8A = \frac{s^2 + 2\omega^2}{3} , \qquad \wp v = \frac{s^2 + 2\omega^2}{36} .$$

$$\wp'^2 u = 4\left[\wp u - \frac{\omega(\omega + 2s)}{36}\right]^2 . \left[\wp u + \frac{\omega(\omega + 2s)}{18}\right] .$$

La solution élémentaire, correspondant à ce cas de dégénérescence des fonctions elliptiques, est donc avec un paramètre ψ, rationnel et quelconque:

$$\wp u = \frac{1}{36}[\psi^2 - 2\omega(\omega + 2s)] ,$$

$$\wp' u = \frac{1}{108}[\psi^2 - 3\omega(\omega + 2s)]\psi .$$

$$S - s = \frac{(\psi - 2s - \omega)^2}{6(\psi - s - 2\omega)} , \qquad S = \frac{(\psi + s - \omega)^2 - 3s(s + 2\omega)}{6(\psi - s - 2\omega)} ;$$

$$AS + B = \frac{\omega^2 - s^2}{72} . \frac{\psi + \omega + 2s}{\psi - s - 2\omega} . \left[\psi - \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}\right] ;$$

$$P = \frac{\omega^2 - s^2}{12} . \frac{\psi + \omega + 2s}{(\psi - \omega - 2s)^2}\left[\psi - \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}\right] ;$$

$$\pm \sqrt{D} = \frac{1}{6}(\psi - 3\omega) . \frac{\psi^2 - 3\omega(\omega + 2s)}{(\psi - s - 2\omega)(\psi - \omega - 2s)} .$$

Les racines X′ et X″ de l'équation du second degré

$$X^2 - SX + P = 0$$

sont ensuite:

$$X' = \frac{1}{6} . \frac{(\psi - s - 2\omega)(\psi + \omega + 2s)}{\psi - \omega - 2s} ,$$

$$X'' = \frac{\omega^2 - s^2}{2} . \frac{\psi - \dfrac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{3(\omega + s)}}{(\psi - s - 2\omega)(\psi - \omega - 2s)} . \qquad (\omega + s \neq 0)$$

Pour $\omega + s = 0$,

$$A = 0\ ,\quad B = -\frac{s^3}{27}\ ,$$

$$108 g_2 = s^4 \qquad 8.3^6 g_3 = s^6\ , \qquad \Delta = 0\ ,$$

$$S - s = \frac{1}{6}\,\frac{(\psi - s)^2}{\psi + s}\ ,$$

$$X' = \frac{1}{6}\cdot\frac{(\psi + s)^2}{\psi - s}\ , \qquad X'' = \frac{4}{3}\cdot s^3\cdot\frac{1}{\psi^2 - s^2}\ .$$

Telles sont, dans le cas élémentaire, les expressions générales des racines d'une équation du second degré, supposées rationnelles et telles que leur somme et leur produit soient liés homographiquement. Ces expressions contiennent trois paramètres quelconques: deux d'entre eux, s et ω sont caractéristiques de la fonction homographique. Pour une telle relation supposée imposée, il y a donc une infinité d'équations du second degré (toujours dans le cas élémentaire de dégénérescence des fonctions elliptiques) qui répondent à la question, sous la condition que les coefficients A, B, s de la fonction homographique satisfont à la condition $\Delta = 0$; la solution dépend alors du paramètre arbitraire ψ.

24. — Indépendamment de la considération des fonctions elliptiques, le cas élémentaire peut être traité de la manière suivante, à partir de l'équation de Fermat

$$(S - s)\,[S^2(S - s) - 4AS - 4B] = \square\ .$$

Le polynome du quatrième degré en S a pour racine s et celle-ci est nécessairement simple, puisque l'expression $As + B$ ne saurait être nulle. Si donc le polynome du quatrième degré a une racine double, cette racine provient du facteur cubique

$$S^3 - sS^2 - 4AS - 4B = 0\ ;$$

elle est donc racine de l'équation du second degré, dérivée de l'équation cubique, ce qui exige que $s^2 + 12A$ soit un carré parfait:

$$s^2 + 12A = \omega^2\ ;$$

la racine double s' est donc de la forme $s'_1 = \frac{s - \omega}{3}$; la racine simple s_1 du facteur cubique est $s_1 = s - s'_1 = \frac{s + 2\omega}{3}$. Les expressions qui en résultent pour A et B sont:

$$A = -\frac{(s - s_1)(s + 3s_1)}{16}, \qquad B = \frac{1}{4} s_1 s_1'^2 = \frac{1}{16} s_1 (s - s_1)^2 ;$$

elles conduisent, en s et ω, aux expressions précédemment trouvées.

Alors:

$$D = \frac{S - s_1}{S - s}(S - s'_1)^2 ,$$

et le produit,

$$(S - s).(S - s_1) = \square ,$$

doit être carré parfait. La question est réduite à un problème bien connu d'analyse indéterminée du second degré seulement. La solution générale est en fonction d'un paramètre arbitraire λ:

$$S = \frac{\lambda^2 - \frac{1}{4} s s_1}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} ,$$

$$S - s = \frac{\left(\lambda - \frac{s}{2}\right)^2}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}}, \qquad S - s_1 = \frac{\left(\lambda - \frac{s_1}{2}\right)^2}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} .$$

$$\pm \sqrt{D} = \frac{\left(\lambda - \frac{s - s_1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}(s - s_1)(s + 3s_1)}{\lambda - \frac{s + s_1}{4}} \cdot \frac{\lambda - \frac{s_1}{2}}{\lambda - \frac{s}{2}} ;$$

et, finalement, ces formules sont équivalentes à celles obtenues par dégénérescence des résultats généraux sous la seule condition de poser:

$$\lambda = \frac{\psi + s - \omega}{6} .$$

25. — *Solutions remarquables dans le cas de dégénérescence.*

I. Solution $\psi = 3\omega$.

$$S = \frac{s + 2\omega}{3}, \qquad P = \frac{(s + 2\omega)^2}{36}, \qquad D = 0 ;$$

$$X' = X'' = \frac{s + 2\omega}{6}.$$

II. Solution $\psi = -(\omega + 2s)$.

$$S = -\sqrt{D} = \frac{1}{9} \cdot \frac{(s + 2\omega)(s - \omega)}{\omega + s}, \qquad P = 0 ;$$

$$X' = 0, \qquad X'' = S.$$

III. Solution $\psi = \frac{1}{3} \cdot \frac{(\omega + 2s)(s + 5\omega)}{\omega + s}$.

$$S = \sqrt{D} = -\frac{1}{9} \frac{(s + 2\omega).(s - \omega)}{s + \omega}, \qquad P = 0 ;$$

$$X' = S, \qquad X'' = 0.$$

IV. Le discriminant D de l'équation du second degré en X n'est, dans le cas général, nul que pour $\psi = 3\omega$ (solution I ci-dessus). Mais si l'expression $\omega(\omega + 2s)$ est triple d'un carré, D est nul pour deux nouvelles valeurs particulières de ψ.

A un facteur près, il suffit de prendre

$$\omega = 3, \qquad s = 2\sigma^2 + 2\sigma - 1, \qquad \psi = \pm 3(1 + 2\sigma).$$

A ces deux valeurs de ψ correspondent les mêmes solutions:

$$X' = X'' = \frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2).$$

$$A = -\frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(\sigma^2 + \sigma + 1),$$

$$B = \frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma^2 + 2\sigma + 5),$$

$$S - s = -\frac{1}{3}(2\sigma + 1)^2. \qquad AS + B = -\frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma + 1)^3.$$

V. La somme S ne pourrait, en général, être nulle pour une valeur rationnelle de ψ. Pour que cette circonstance se produise il faut que $s(s + 2\omega)$ soit triple d'un carré.

En prenant, à un facteur près,

$$s = 3 \;, \qquad \omega = 2\sigma^2 + 2\sigma - 1 \;,$$

on obtient

$$\psi_1 = 2\sigma^2 + 8\sigma - 1 \qquad \text{et} \qquad \psi_2 = 2\sigma^2 - 4\sigma - 7 \;.$$

A la solution ψ_1 correspondent les expressions suivantes:

$$X'' = -X' = \frac{1}{9}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(2\sigma + 1) \;,$$

$$A = \frac{1}{3}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(\sigma^2 + \sigma + 1) \;,$$

$$B = \frac{1}{27}(\sigma - 1)^2(\sigma + 2)^2(2\sigma + 1)^2 \;.$$

$$S = 0 \;, \qquad P = -\frac{B}{3} \;.$$

A la solution ψ_2 correspond un simple changement de signes sur X' et X'':

$$X' = -X'' = \frac{1}{9}(\sigma - 1)(\sigma + 2)(2\sigma + 1) \;.$$

Après cette étude générale des équations de Fermat, pour un polynome ayant au moins un zéro rationnel, il reste à appliquer les formules qui viennent d'être établies à l'examen d'un certain nombre d'applications géométriques: triangles héroniens du paragraphe 22, triangles pseudo isocèles (paragraphe 10), etc... Je reviendrai sur ces diverses questions très prochainement.

Août 1927.