2. — Propriétés locales d'une transformation finie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

par l'intermédiaire des transformations finies et nous introduirons le *Jacobien* comme limite du rapport de deux volumes correspondants, lorsque le diamètre de l'un tend vers zéro. La *divergence* sera la notion limite du jacobien, obtenue en passant du cas des transformations finies à celui des transformations infinitésimales. C'est ce que nous allons préciser.

2. — *Propriétés locales d'une transformation finie.*

Soit une transformation finie:

$$P = \mathcal{T}(M) \tag{1}$$

qui à chaque point M d'un premier espace $\mathcal{E}_M$ fait correspondre *continument* un point P d'un second espace $\mathcal{E}_P$ [1]. Le mode de symbolisme (1) convient bien pour l'étude des propriétés de la transformation indépendantes des dimensions et correspond très exactement à la notation habituelle

$$y = f(x)$$

désignant une fonction d'une variable, par laquelle on établit une correspondance liant à certains points de xx' certains points de yy' (cas d'une dimension).

Reprenons la transformation continue définie par (1). Soit M_0 un point particulier de $\mathcal{E}_M$ et soit P_0 son transformé. La transformation étant continue, si M est voisin deM_0, P sera voisin de P_0. Une hypothèse naturelle et fréquente consiste à supposer l'existence d'une transformation linéaire tangente en chaque point M_0 de la région considérée dans $\mathcal{E}_M$. L'introduction d'axes de coordonnées nous amènerait à remplacer l'équation (1) par trois équations scalaires:

$$X = f(x, y, z) \;; \qquad Y = g(x, y, z) \;, \qquad Z = h(x, y, z) \;. \tag{2}$$

La transformation linéaire tangente est celle qui au point M_0 fait correspondre P_0 et qui au vecteur $\overrightarrow{dM}(dx, dy, dz)$ fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{dP}(dX, dY, dZ)$, d'origine P_0 et dont les composantes dX, dY, dZ sont les différentielles totales des fonc-

[1] L'espace $\mathcal{E}_P$ n'est pas nécessairement distinct de l'espace $\mathcal{E}_M$.

tions (2). Lorsque la transformation linéaire tangente existe en chaque point M d'une région R de $\mathcal{E}_M$ et lorsqu'elle dépend continument de M dans cette région, on peut alors établir le théorème suivant :

Soit (M_0, P_0) un couple de points qui se correspondent dans $\mathcal{E}_M$ $\mathcal{E}_P$ et par la transformation $\mathcal{T}$. Soit :

$$J(M_0) = \begin{vmatrix} f'_{x_0} & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ g'_{x_0} & g'_{y_0} & g'_{z_0} \\ h'_{x_0} & h'_{y_0} & h'_{z_0} \end{vmatrix}$$

le déterminant de la transformation linéaire $\mathcal{T}_{M_0}$ tangente à $\mathcal{T}$ en M_0. Supposons que ce déterminant ne soit pas nul, c'est-à-dire que $\mathcal{T}_{M_0}$ ne soit pas dégénérescente. On peut alors définir un certain voisinage de M_0 et un certain voisinage de P_0 entre lesquels la correspondance définie par (1) s'exerce d'une manière biunivoque. A un volume infiniment petit et infiniment voisin de M_0, correspond un volume infiniment petit et infiniment voisin de P_0; le rapport du second au premier tend précisément vers J (M_0). Cette fonction J (M), limite du rapport de deux volumes correspondants, définie indépendemment du nombre des dimensions, se réduit à la dérivée dans le cas d'une dimension. Notons encore que J (M) est définie, non seulement en valeur absolue, mais encore en signe, celui-ci indiquant si l'orientation des figures voisines de M_0, rapportée aux axes x, y, z concorde ou non avec l'orientation des figures voisines de P_0, rapportée aux axes X, Y, Z [1].

---

[1] Moyennant ces hypothèses, une annulation du jacobien le long d'une surface S prise dans $\mathcal{E}_M$ et déterminant dans son voisinage deux régions R_M et R'_M entraîne *en général* dans l'espace $\mathcal{E}_P$ la circonstance suivante: soit Σ la transformée de S qui sépare aussi son voisinage en deux régions R_P et R'_P. Les points M voisins de S, de part et d'autre de S (dans R_M et R'_M) ont pour transformés des points P voisins de Σ et situés d'un même côté de Σ (p. ex. dans R_P exclusivement). Il y a là une propriété indépendante du nombre n des dimensions. Dans le même ordre d'idées citons la suivante qui généralise le théorème de Rolle : soit la transformation $P = \mathcal{T}(M)$ soumise à toutes les hypothèses précédentes, et soit un domaine D de l'espace $\mathcal{E}_M$, limité par une surface d'un seul tenant, douée d'un champ continu de normales. Supposons que tous les points de cette surface aient même transformé P_0. Dès lors on peut trouver dans D au moins une surface sur laquelle le jacobien s'annule. Pour le démontrer, à l'exemple de ce qui se fait dans le théorème de Rolle, on considérera la surface qui délimite le domaine Δ recouvert par les transformés des points de D. Elle provient d'une certaine surface du premier espace, sur laquelle il y a précisément annulation du jacobien, avec changement de signe.

Remarques. — Nous venons d'employer la locution *volume.* Par volume, nous entendons ici un domaine (= ensemble d'un seul tenant dont chaque point peut être pris pour centre d'une sphère dont tous les points appartiennent à l'ensemble) dont la *mesure intérieure* et la *mesure extérieure* sont égales. Ces mesures sont définies à l'aide d'un *réseau binaire progressif* (formé à partir d'un cube initial arbitraire, du pavage régulier de l'espace obtenu en lui juxtaposant des cubes égaux, et de tous les pavages analogues qui s'en déduisent par subdivision binaire des arêtes, indéfiniment répétée). La mesure intérieure est alors la borne supérieure des volumes polyèdres intérieurs au domaine donné et obtenus par sommation de cubes du réseau indéfini, tandis que la mesure extérieure est la borne inférieure des volumes des polyèdres englobant le domaine et obtenus aussi par sommation de cubes du réseau indéfini. Le domaine donné est un volume seulement quand ces bornes sont égales.

3. — *Opportunité d'une définition directe du jacobien.*

Il n'est pas nécessaire de passer par l'intermédiaire de la transformation linéaire tangente pour définir le jacobien. L'hypothèse d'existence de cette transformation introduit à la généralité d'inutiles restrictions. Supposons que les formules (2) soient du type suivant :

$$X = x \qquad Y = y \qquad Z = z + \psi(x, y) .$$

Nous aurons une transformation conservant les volumes, en grandeur et en signe. Il est donc naturel de lui attribuer un jacobien égal à $+ 1$. Cependant, si la fonction $\psi(x, y)$ n'a pas de dérivées, il n'y aura pas de transformation linéaire tangente.

Il y a donc lieu de définir le jacobien directement. On peut proposer diverses définitions, exigeant chacune une revision des propositions ci-dessus rappelées, notamment du théorème relatif à la réversibilité locale de la transformation. En réalité, nous n'aurons ici à raisonner que sur des transformations intégralement biunivoques (déformations), à la classe desquelles les transformations infinitésimales appartiennent nécessairement.