3. — Espérances mathématiques des autres cartes et des joueurs dans la seconde période.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

La carte Auberge peut donc espérer recevoir des joueurs actifs

$$t_\mu = s_\mu + q_\mu \tag{5}$$

dans le cas qu'elle trouve μ dans la caisse au moment d'être ouverte. Mais ce n'est pas tout. De la règle 16 il suit que le joueur qui tient l'Auberge ne doit rien payer à cette carte (comme les autres le doivent) mais que le Cheval fait ce service pour lui. Il faut donc ajouter à t_μ, $\frac{s_\mu}{n}$ et un autre terme que nous calculerons bientôt.

3. — *Espérances mathématiques des autres cartes et des joueurs dans la seconde période.*

Examinons maintenant la source de ces gains de l'Auberge compris dans t_μ. Comme dans les cas examinés par M. Jéquier, nous trouvons que les cartes Cloche, Marteau, et Cloche-Marteau paieront respectivement $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{5}{36}t_\mu$, $\frac{1}{36}t_\mu$; car dans $\frac{5}{36}$ des coups on amènera Cloche sans Marteau (ou Marteau sans Cloche) et dans $\frac{1}{36}$ des coups Cloche et Marteau ensemble.

Enfin, il faut partager les $\frac{25}{36}t_\mu$ qui restent entre le Cheval et les joueurs actifs. Ce sont toujours ces derniers qui paient le coup qui ouvre l'Auberge; en effet, ce coup ne peut pas amener 0. $\frac{25}{36}s_\mu$ est payé par les joueurs actifs. Soit $\frac{25}{36}(t_\mu - s_\mu) = \frac{25}{36}q_\mu = y_\mu + z_\mu$, où y_μ est la somme que l'Auberge espère recevoir des joueurs actifs, z_μ celle qu'il espère recevoir du Cheval.

Le calcul de z_μ est fort semblable à celui de q_μ. Avec 1 dans la caisse, nous trouvons

$$z_1 = \frac{\nu_0}{\nu_0 + \sum_{\rho=2}^{21} (\rho - 1)\nu_\rho} \cdot \frac{25}{36}q_1 = \frac{\frac{25}{36}\nu_0}{\nu_1} \cdot \tag{6}$$

En général, avec μ dans la caisse, la partie de $\frac{25}{36} q_\mu$ que le Cheval doit attendre à payer sera

$$z_\mu = \frac{\frac{25}{36} \nu_0 + \sum_{\rho=1}^{\mu-1} \nu_\rho z_{\mu-\rho}}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}. \tag{7}$$

En effet, l'espérance mathématique de cette perte avant la première réduction de la caisse est

$$\frac{25}{36} \frac{\nu_0}{\nu_0 + \sum_{\rho=\mu+1}^{21} (\rho - \mu) \nu_\rho} q'_\mu = \frac{\frac{25}{36} \nu_0}{\sum_{\rho=1}^{\mu} \nu_\rho}.$$

En

$$\frac{\nu_\rho}{\sum_{\sigma=1}^{\mu} \nu_\sigma}$$

des cas, cette réduction prendra ρ de la caisse et y laissera $\mu - \rho$. La formule pour z_μ est dès lors évidente.

De la valeur de z_μ on trouve tout de suite celle de y_μ.

La 16me règle montre que le joueur actif, auquel appartient l'Auberge, reçoit du Cheval chaque somme qu'il paie à la propre carte; ce qui donne à cette carte une valeur de plus de $\frac{s_\mu + y_\mu}{n}$. Sa valeur totale est donc

$$\Gamma_{\mathrm{Au}, \mu} = t_\mu + \frac{y_\mu + s_\mu}{n}. \tag{8}$$

Les μ jetons qui restent dans la caisse quand l'Auberge s'ouvre sont encore à distribuer. Il est évident que la Cloche en reçoit (au cas moyen) $\frac{5}{36}\mu$, le Marteau la même quantité, Cloche-Marteau $\frac{1}{36}\mu$, et les joueurs actifs $\frac{25}{36}\mu$.

En résumant, pour le cas que μ jetons restent dans la caisse à l'ouverture de l'Auberge, les espérances mathématiques des joueurs sans cartes, et des cartes, sont les suivantes. Pour un joueur seul

$$\Gamma_{S,\mu} = \frac{0{,}56155\,(C - \mu) + \frac{25}{36}\mu - \frac{25}{36}s_\mu - y_\mu}{n}$$

$$= \frac{0{,}56155\,C + 0{,}13289\,\mu - 0{,}69444\,s_\mu - y_\mu}{n} \,. \qquad (9)$$

Pour la Cloche ou le Marteau

$$\Gamma_{Cl,\mu} = \Gamma_{M,\mu} = 0{,}12560\,(C - \mu) + \frac{5}{36}\mu - \frac{5}{36}s_\mu - \frac{5}{36}q_\mu$$

$$= 0{,}12560\,C + 0{,}01329\,\mu - 0{,}13889\,t_\mu \,. \qquad (10)$$

Pour la Cloche-et-Marteau

$$\Gamma_{CM,\mu} = 0{,}02512\,C + 0{,}00266\,\mu - 0{,}02778\,t_\mu \,. \qquad (11)$$

Pour le Cheval

$$\Gamma_{Ch,\mu} = 0{,}16213\,(C - \mu) - \frac{s_\mu}{n} - \frac{y_\mu}{n} - z_\mu \,. \qquad (12)$$

Pour l'Auberge

$$\Gamma_{Au,\mu} = t_\mu + \frac{S_\mu}{n} + \frac{y_\mu}{n} \,. \qquad (13)$$

4. — *Probabilité d'ouvrir l'Auberge avec μ dans la Caisse.*

Il y a ν_σ possibilités d'amener σ par un seul coup. Combien de possibilités y a-t-il que le premier coup qui cause que le total jusque là amené soit au moins C, compte σ ? Vu que le coup même peut arriver quand la caisse possède 1, 2, . . . , σ, le nombre de ces possibilités devra être $\sigma\nu_\sigma$.

La probabilité, donc, que ce soit un versement de σ qui ouvre l'Auberge (et éventuellement fait que la caisse saute) est

$$\lambda_\sigma = \frac{\sigma\nu_\sigma}{\sum_{\rho=1}^{21} \rho\nu_\rho} \,. \qquad (14)$$

Il est également probable que ce versement de σ laisse 0, 1, 2, . . , ou $\sigma - 1$ dans la caisse. Autrement dit, la probabilité