

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Maurice Fréchet. — Les Espaces abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse générale. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) — Un volume gr. in-8° de xii-296 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

Autor: Buhl, A.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

conduisent aux confins extrêmes de la Théorie de la Connaissance et en font sentir l'infirmité tout autrement que par des considérations philosophiques d'humilité.

A mon avis, cependant très humble, voilà un point qui, en mettant les choses au mieux, peut être la source d'améliorations continues mais sans qu'on puisse jamais y découvrir une base définitive pour la construction logique. Quelles envolées derrière la petite notion d'intégrale que les candidats au baccalauréat commencent à connaître et comme elles suffisent à diriger la curiosité vers l'œuvre d'un Lebesgue alors qu'il est évidemment de toute impossibilité de peindre vraiment celle-ci en un minuscule article bibliographique.

M. Denjoy, esprit pénétrant extrêmement habile à jongler avec les paradoxes, quant à l'intégration des fonctions sommables et la recherche des primitives a réussi à dégager des généralités étendues grâce à la notion du « presque partout » qui revient à la considération d'ensembles de mesure nulle. Mais le collaborateur le plus intime, le plus profond de M. Lebesgue est, sans contredit, M. René Baire qui, professeur de spéciales, remarquait déjà la façon désinvolte dont l'enseignement utilisait les notions de continuité. Lui ayant une fois parlé de M. Lebesgue, il me répondit : « C'est mon frère spirituel ! »

Maintenant il est heureusement hors de doute que la Science n'oubliera point cette fraternité. On peut partir des classes fonctionnelles de M. Baire pour aboutir à la « totalisation » de M. Denjoy qui semble bien être, pour les primitives, le procédé de construction le plus général. Il reste toutefois l'intégrale de Stieltjes qui relève d'une idée dont on est tenté de dire qu'elle s'oppose ou peut s'opposer symétriquement à toutes les précédentes avec les mêmes degrés de généralité. Reprenons les $u_i dx_i$. Jusqu'ici, ce sont les u_i qui ont surtout été variés. Stieltjes s'est acharné sur les dx_i , leur prêtant de très diverses constitutions fonctionnelles. Pour certaines de ces constitutions, de nouveaux paradoxes naissent en foule, venant parfois jusqu'à menacer la notion d'intégrale de fonction continue ! Faut-il en dire davantage pour signaler le caractère général de cette analyse ? Que d'horizons nouveaux elle ouvre sur tout ce qui touche à la constitution de la notion de grandeur ! Et il y a encore le transfini qui ne peut être pratiquement atteint tout en nous imposant cependant ses lois d'ordination. Depuis Cantor, les Lebesgue, les Baire, les Denjoy, les Young (M. et M^{me} W.-H.) et quelques autres soigneusement cités dans cette seconde et magnifique édition, ont apporté à l'Analyse un esprit de profondeur qui donne parfois le vertige.

A. BUHL (Toulouse).

Maurice FRÉCHET. — Les Espaces abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse générale. (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel.) — Un volume gr. in-8° de XII-296 pages. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

« Le continu fonctionnel n'offre à notre esprit aucune image simple. « L'intuition géométrique ne nous apprend rien, *a priori*, sur son compte. « Nous sommes forcés de remédier à cette ignorance et nous ne pouvons le « faire qu'analytiquement, en créant à l'usage du continu fonctionnel un « chapitre de la Théorie des ensembles. » Ces lignes, dues à M. Jacques

Hadamard, ont été publiées, en 1912, par *L'Enseignement mathématique* (t. XIV, p. 17). Elles servent de frontispice au présent ouvrage et nous sommes heureux de montrer que notre Revue joue parfois un rôle prophétique. La prophétie est analogue à celle qu'on aurait pu faire dès l'apparition des premiers travaux des Lebesgue et des Baire. L'enseignement des Mathématiques, surtout dans les Facultés françaises, s'élève peu au-dessus des Mathématiques générales. Nombreux sont les élèves qui, préparés par ce premier exposé, font ensuite un an de Calcul infinitésimal et s'en tiennent là. On est toujours dans le voisinage des fonctions élémentaires et des propriétés les plus immédiatement accessibles par intuition. Et beaucoup de professeurs mêmes veulent que la vraie science ne soit que là. Plus loin, ils ne voient qu'un symbolisme peu compréhensible, à peu près sans objet.

Il faut de puissants esprits, comme celui de M. Maurice Fréchet, pour construire et faire admirer une Analyse générale en laquelle les notions fondamentales semblent à peu près se nommer comme des notions intuitives et vulgaires correspondantes tout en entrant dans des combinaisons logiques incomparablement plus parfaites. Et, personnellement, je suis absolument persuadé que cette science générale ne se sépare pas du monde réel. Sans doute l'image, dont parle M. Hadamard dans les lignes précitées, paraît fréquemment absente au premier abord mais c'est parce que les images commodes habillent souvent très mal le réel; une réalité de mieux en mieux pénétrée semble de moins en moins révéler une structure simple et un esprit de plus en plus pénétrant doit trouver à y placer les plus abstraites conceptions de cet esprit qui — postulat qui m'est cher — ne peut rien avoir en lui qui ne soit quelque reflet, quelque forme d'une réalité.

Les réalités sont prodigieusement transformables par opérations spirituelles; ainsi nous trouvons dans ce livre les *espaces* de M. Hilbert, de M. Baire, de M. Banach, etc.

Un poème est un assemblage de lettres dans un espace poétique; après l'impression, ces mêmes lettres seront dérangées puis rangées à nouveau, très méthodiquement, dans les casses typographiques. Il y a ordre dans les deux cas. Conçoit-on, par cet exemple qui, au premier abord fait l'effet d'une boutade mais est cependant tout ce qu'il y a de plus sérieux, l'immense importance de la notion d'ordre? Ce n'est que lorsque des espaces sont convenablement ordonnés qu'on peut dire si certaines notions, considérées autrefois comme primordiales, telles la notion de distance, y ont véritablement une raison d'être. Je me hâte d'ajouter que les espaces (D) associables à la notion de distance jouent un rôle d'une importance immense dans l'œuvre de M. Fréchet. Ce dernier est aussi partisan de la théorie des habillements géométriques plus ou moins ajustés dont nous revêtons les champs fonctionnels (p. 124); il ne faut pas croire qu'on a analysé le champ quand on a analysé le vêtement. Que de querelles ont été engendrées par des confusions ainsi commises. Les espaces *affines*, admettant comme cas particuliers les espaces vectoriels, sont les vêtements de travail les plus usuels; abstraire ces espaces ne fait qu'épurer leur structure sans nuire à leurs excellentes qualités pratiques. Et ainsi, grâce à la notion de distance et aux espaces (D) qui s'accommodent de ses modalités, le volume contient une première partie tangente à la science maniée ordinairement.

Une deuxième partie est plus essentiellement philosophique. La notion de distance peut s'évanouir en laissant subsister quelque chose d'un espace de même que la convergence uniforme peut disparaître en laissant subsister

quelque chose d'une série. Parler de la distance de a et b , c'est envisager une certaine liaison entre a et b mais non pas l'ensemble de toutes les liaisons possibles; b peut révéler son existence en a autrement que par la donnée d'un nombre ou d'une mesure et s'il se révèle en a , sans être a , une notion d'espace en résulte. Nous n'essaierons point de décrire en détail cette seconde partie; disons seulement qu'elle nous ramène à MM. Lebesgue, Baire, Denjoy, ... avec un langage géométrique que ces savants ne croyaient pas toujours pouvoir conserver. La notion de continuité, avec ses infinies complexités, s'associe enfin à la notion d'espace fonctionnel dans les cas où l'association peut être permise mais que de précautions il faut pour en arriver là. Ignorer ces précautions, c'est s'exposer aux pires paradoxes, les étudier, c'est en voir naître. Ce que nous scrutons vraiment, en tout ceci, c'est notre façon de concevoir, indéniablement imparfaite mais qui nous présente sans cesse de nouveaux objets quand nous nous proposons de réfléchir et de travailler. Ces objets, nous n'avons pas à les refuser et, quand on peut en faire des tableaux aussi joliment ordonnés que ceux de M. Fréchet, on a certainement fait une œuvre hautement scientifique.

A. BUHL (Toulouse).

Thomas TOMMASINA. — **La Physique de la Gravitation et la Dynamique de l'Univers.** — Un vol. gr. in-8° de VIII-302 pages avec un portrait et un autographe de l'auteur. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars et Cie. Paris. 1928.

Ceci me paraît être le second ouvrage antieinsteinien, d'apparence sérieuse, dont nous nous efforcerons de rendre compte avec impartialité. Le premier était constitué par les *Espaces courbes* de MM. Burali-Forti et Boggio dont nous avons entretenu, en effet, les lecteurs de *L'Enseignement mathématique* (t. XXIII, 1923, p. 334). Personnellement, je suis habitué à rencontrer un style analogue à celui de M. Tommasina dans des brochures que revues ou éditeurs ne publient point d'où finalement recours à un imprimeur quelconque et aspect caractéristique.

Ici ce n'est pas du tout le cas et j'ai sous les yeux un fort beau volume édité avec tout le soin que la maison Gauthier-Villars apporte à ses productions. Malheureusement, ceci ne rend pas plus convaincante la thèse de l'auteur qui est d'abord une diatribe dirigée contre les mathématiciens. Dès la page 3, le mathématicien est très conservateur, très routinier! Vraiment? Il me semblait, au contraire, qu'Einstein et ses disciples avaient eu contre eux tous ceux qui craignaient d'avoir à changer quelque chose à leurs conceptions acquises. Mais ceci n'est rien encore et les choses s'aggravent rapidement avec des attaques répétées contre Henri Poincaré dont le génie même est discuté avec tentative de rabaissement. Après cela, il me faut un grand effort pour continuer mon examen. Si je n'écoutais que mon impulsion, je mettrais le livre de côté et n'y songerais plus. Comment un penseur de l'âge de M. Tommasina peut-il ne pas savoir, ou du moins oublier, que les théories de valeur doivent triompher d'elles-mêmes sans qu'il soit besoin d'en rabaisser d'autres, sans qu'il faille se servir d'aucune expression péjorative dirigée contre qui que ce soit? Mais l'analyse de l'œuvre ne peut être poursuivie en cataloguant les innombrables critiques que distribue l'auteur aux uns et aux autres; ce n'est que la partie négative d'un travail cependant grand et sincère. Essayons plutôt de voir la partie