8. Application.

La masse du fluide qui occupe Ω à l'instant t a pour volume une certaine fonction du temps. Le théorème de variation du volume exprimé par la formule (3) nous apprend que cette fonction du temps a pour dérivée:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} \, d\omega \; .$$

D'autre part, on a également :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma$$

$\vec{\nu}$ désignant le vecteur unité de la normale extérieure en un point de Σ. D'où le théorème flux divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\nu} \, d\omega = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma \; . \tag{5}$$

En réalité, en conservant les mêmes hypothèses sur Σ, on pourrait montrer (a la base des résultats signalés sans démonstration au n° 5) que cette formule est valable dans des conditions beaucoup plus générales: il suffit de supposer l'existence et la sommabilité de div. $\vec{V}$.

8. *Application.*

Il est clair que tout ce que nous venons de dire dans le cas de l'espace à 3 dimensions s'applique, avec des modifications évidentes au cas où les vecteurs considérés appartiennent tous au même plan. Le jacobien sphérique centré par exemple, sera remplacé par un jacobien circulaire centré, et nous aurons la relation:

$$\int_{S} \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\sigma = \int_{C} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, ds \tag{6}$$

C étant une courbe fermée à tangente continue sans point double, $\vec{\nu}$ la normale extérieure, $d\sigma$ l'élément d'aire.

Soit alors P (x, y), Q (x, y) deux fonctions données, $\vec{V}$ le vecteur de composantes Q et — P; il est clair que l'on a:

$$\int_{C} P\,dx + Q\,dy = \int_{C} \vec{V} \cdot \vec{\nu} \, ds \; .$$

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct:

$$\int_C \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy = \int_S \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{V}}\,.\,d\sigma \tag{7}$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}\mathrm{Q} - \vec{y}\mathrm{P}$ *soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée* [1].

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}\mathrm{Q} - \vec{y}\mathrm{P})\,.\,\vec{\nu}\,ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

9. *Définition du rotationnel.*

Pour définir le rotationnel, nous poserons:

$$\mathrm{div}\,(\vec{\mathrm{V}} \wedge \vec{u}) = \vec{u}\,.\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{V}} \tag{8}$$

où $\vec{u}$ désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe [2]. On voit immédiatement que si les composantes de $\vec{\mathrm{V}}$ ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z, le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

---

[1] L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

[2] Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\,.\,\vec{u} = \mathrm{div}\,(\varphi\vec{u})\,.$$