12. Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

qu'un nombre fini de points anguleux grâce à l'artifice qui consiste à arrondir ces singularités; et cela suffit pour que ω soit la différentielle d'une fonction dF.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

soit une différentielle totale est que l'on ait:

$$\operatorname{div}_{(x)} \vec{V} = 0 \,, \qquad \operatorname{div}_{(y)} \vec{V} = 0 \,; \qquad \operatorname{div}_{(z)} \vec{V} = 0 \,.$$

12. *Conséquences du théorème flux-divergence généralisé.*

Pour terminer nous allons enfin indiquer quelques conséquences intéressantes que l'on peut tirer de la généralisation donnée par M. Bouligand du théorème flux-divergence. Plaçons-nous dans le cas du plan et soit Oxy un système d'axes orthogonal et normal. Donnons-nous une fonction $f(x)$ et considérons le vecteur:

$$\vec{x} f(x)$$

supposons qu'il admette une divergence circulaire centrée continue: Je dis alors que $f(x)$ admet une dérivée continue et que l'on a:

$$f'(x) = \operatorname{div} \vec{x} f(x) \,.$$

Soit en effet C le contour rectangulaire limité par les droites Ox, $x = x_0$, $y = a$, Oy. Nous avons S, étant le domaine de ce rectangle:

$$\int_S \operatorname{div} \vec{x} f(x) = \int_C f(x)\, \vec{x} \cdot \vec{\nu}\, ds \,.$$

Le long de Ox et du côté opposé à Ox, on a:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = 0$$

le long de la parallèle à Oy d'abscisse x_0:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = \vec{x} \cdot \vec{x} = 1$$

et le long de Oy:

$$\vec{x} \cdot \vec{\nu} = -\vec{x} \cdot \vec{x} = -1 \,.$$

On a donc:

$$\int_C f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,ds = af(x_0) - af(0)\ .$$

Or:

$$\int_S \operatorname{div} \vec{x} f(x) = a \int_0^{x_0} \operatorname{div} \vec{x} f(x)\,dx$$

car div $\vec{x}$ $f(x)$ dépend de x seul. On a donc :

$$f(x_0) - f(0) = \int_0^{x_0} \operatorname{div} \vec{x} f(x)\,dx$$

x_0 étant arbitraire, nous en tirons la conclusion annoncée. Ceci posé, soit Γ un cercle de centre $(x_0, 0)$ et de rayon ρ. Nous avons:

$$\operatorname{div} \vec{x} f(x) = \lim \frac{1}{\pi\rho^2} \int_\Gamma \vec{x} f(x)\,.\,\vec{\nu}\,ds\ .$$

Or:

$$\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho}\vec{x} + \frac{y - y_0}{\rho}\vec{y}\ .$$

Donc

$$\vec{x}\,.\,\vec{\nu} = \frac{x - x_0}{\rho} = \cos\alpha$$

et

$$ds = \rho\,d\alpha\ ;$$

donc

$$\operatorname{div} f(x)\,\vec{x} = \lim_{\rho=0} \frac{1}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

et nous avons le théorème suivant:

Si f (x) *est telle que la quantité:*

$$\frac{1}{\pi\rho} \int_0^{2\pi} f(x + \rho\cos\alpha)\cos\alpha\,d\alpha$$

reste bornée en valeur absolue aussi petit soit ρ, *et tende vers une limite* φ(x) *continue quand* ρ *tend vers zéro, alors* f(x) *admet une dérivée continue égale à* φ(x).

On voit d'ailleurs facilement que si $f'(x)$ existe la quantité ci-dessus a une limite qui lui est égale. Il est clair que le théorème ci-dessus est susceptible de nombreuses variantes, puisque pour définir le jacobien on peut prendre n'importe quelle courbe fermée sans points doubles entourant le point x et tendant vers lui.

Prenons en particulier un jacobien carré. Nous aurons à former la quantité:

$$\frac{f(x+\rho)-f(x-\rho)}{2\rho}$$

et l'on voit que si elle est bornée en valeur absolue et tend vers une limite continue quand ρ tend vers zéro, le quotient

$$\frac{f(x+\rho)-f(x)}{\rho}$$

qui définit la dérivée admet lui aussi une limite égale à la précédente.

Prenons encore un jacobien carré, mais en prenant le point x comme point de concours des diagonales, qui seront parallèles respectivement à Ox et à Oy, et l'on sera amené à faire les hypothèses énoncées plus haut sur l'expression remarquable:

$$\frac{1}{\rho^2}\left[\int_{x_0}^{x_0+\rho} f(x)\,dx - \int_{x_0-\rho}^{x_0} f(x)\,dx\right]$$

comme le montre un calcul facile.

Enfin, pour terminer, nous pouvons remarquer que rien ne nous obligeait à rester dans l'espace à 2 dimensions, et l'on pouvait par exemple considérer la divergence sphérique centrée de $\vec{x}\,f(x)$, c'est-à-dire :

$$\lim \frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_\Sigma f(x)\,\vec{x}\,.\,\vec{\nu}\,d\sigma$$

Σ étant une sphère de centre x et de rayon ρ. Un calcul facile permet d'écrire cette expression:

$$\lim_{\rho=0} \frac{3}{4\pi}\int_0^\pi f(x+\rho\cos\alpha)\sin 2\alpha\,d\alpha\,;$$

on en tire les mêmes conclusions que précédemment.