§1. — L'aire du triangle en coordonnées homogènes (triangulaires).

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

PAR

D. SINTSOF (Kharkof).

C'est à CAYLEY que nous sommes redevables de l'introduction du moment de deux droites. Dans mon mémoire « Théorie des connexes dans l'espace » (*Annales de l'Université de Kasan*, 1895) j'ai appliqué cette notion aux deux droites que l'on obtient si l'on prend deux éléments (point, plan), — l'une qui joint les points, l'autre qui est l'intersection des deux plans, et c'est à cette expression que j'ai donnée le nom de moment de deux éléments du connexe.

Mais l'expression analytique que l'on établit existe aussi pour le connexe ternaire, et j'ai donné (*loc. cit.*, Ch. IV, remarque) son interprétation géométrique.

Mais pour les applications il est important de montrer quels sont les multiplicateurs numériques que l'on introduit, si l'on prend un système particulier de coordonnées homogènes.

C'est par ce problème élémentaire que je commence. Il ne me paraît pas dépourvu d'intérêt. Puis je donne des applications à la théorie des connexes.

PREMIÈRE PARTIE.

§ 1. — *L'aire du triangle en coordonnées homogènes (triangulaires).*

FERRERS *(Trilinear coordinates)* donne l'expression pour la distance de deux points en coordonnées homogènes. Il n'est pas sans intérêt de donner l'expression correspondante de l'aire d'un triangle.

Prenons pour coordonnées homogènes x, y, z d'un point M les perpendiculaires MQ, MP, MR abaissées de M sur les côtés du triangle fondamental ABC (fig. 1) ayant au sommet C l'angle ω; les longueurs des côtés opposés aux sommets A, B, C étant a, b, c, on a

$$ax + by + cz = 2\Delta ABC \equiv 2\Delta_0 \ . \tag{1}$$

Soient les coordonnées (non-homogènes) du même point M par rapport aux axes CA, CB, $\bar{x}$, $\bar{y}$. Alors

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} \,.\, \sin\omega \\ y &= \bar{y} \sin\omega \end{aligned}\right\} . \tag{2}$$

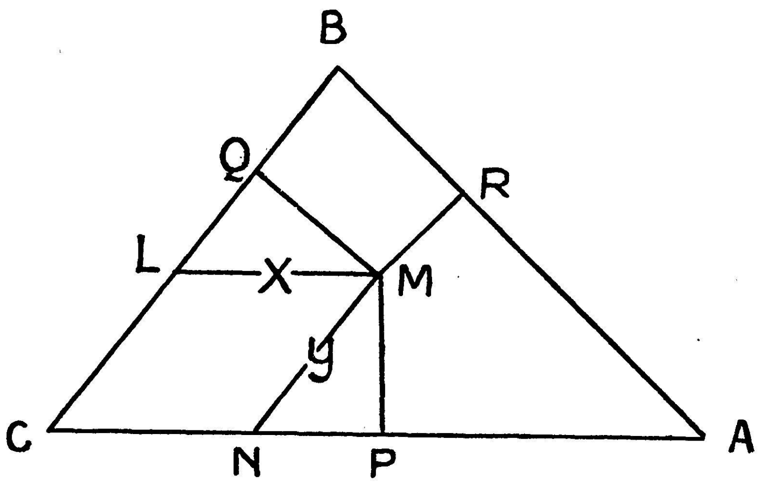

Fig. 1.

Donc, si l'on prend trois points M, M′, M″

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & \dfrac{2\Delta_0 - ax - by}{c} \\ x' & y' & \dfrac{2\Delta_0 - ax' - by'}{c} \\ x'' & y'' & \dfrac{2\Delta_0 - ax'' - by''}{c} \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}$$

ou, d'après (2)

$$= \frac{2\Delta_0}{c} \begin{vmatrix} \bar{x} & \bar{y} & 1 \\ \bar{x'} & \bar{y'} & 1 \\ \bar{x''} & \bar{y''} & 1 \end{vmatrix} . \sin^2\omega \ .$$

Mais si l'on fait tourner l'axe des y (CB) de l'angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ les coordonnées nouvelles ξ, η s'expriment à l'aide de $\overline{x}$, $\overline{y}$:

$$\overline{y} = \frac{\eta}{\sin \omega}, \qquad \overline{x} = \xi - \eta \operatorname{cotg} \omega .$$

Donc

$$\begin{vmatrix} \overline{x} & \overline{y} & 1 \\ \overline{x'} & \overline{y'} & 1 \\ \overline{x''} & \overline{y''} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & -\eta \operatorname{cotg} \omega & \eta & 1 \\ \xi' & -\eta' \operatorname{cotg} \omega & \eta' & 1 \\ \xi'' & -\eta'' \operatorname{cotg} \omega & \eta'' & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sin \omega} \begin{vmatrix} \xi & \eta & 1 \\ \xi' & \eta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & 1 \end{vmatrix}$$

ce qui est égal à $\frac{2\Delta}{\sin \omega}$, Δ étant l'aire du triangle MM′ M″.

Donc, dans le système des coordonnées homogènes, que nous avons choisi, on a

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x', & y', & z' \\ x'', & y'', & z'' \end{vmatrix} = \frac{2\Delta_0}{c} \cdot \frac{2\Delta}{\sin \omega} \cdot \sin^2 \omega = 2\Delta \cdot h_c \cdot \sin \omega \qquad (3)$$

puisque $2\Delta_0 = c \cdot h_c$, h_c étant la hauteur correspondant à la base AB du triangle ABC. On pourrait encore poser $2\Delta_0 = ab \sin \omega$. Alors

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \frac{ab}{c} \sin^2 \omega \cdot \Delta . \qquad (3')$$

Le défaut de la formule (3′) est son manque de symétrie. Si nous prenions pour l'origine des coordonnées obliques d'autres sommets du triangle ABC: A ou B nous aurions $\frac{bc}{a} \sin^2 A$ ou bien $\frac{ac}{b} \sin^2 B$.

Les trois expressions sont égales, vu que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin c} = 2R .$$

Donc enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 2\Delta \cdot \frac{\Delta_0}{R} = 2\Delta \frac{abc}{4R^2} . \qquad (3'')$$

Telle est la relation entre la valeur du déterminant des coordonnées homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t, les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, α, β, γ, δ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \,.\, x + \beta \,.\, y + \gamma \,.\, z + \delta \,.\, t = 3 \,.\, V_0 \,. \qquad (1)$$

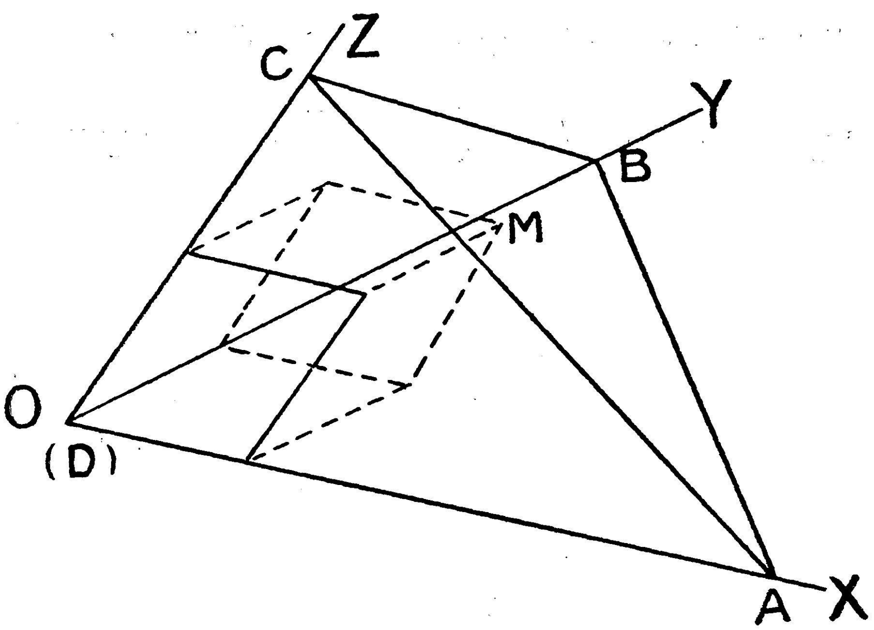

Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x, & y, & z, & t \\ x', & y', & z', & t' \\ x'', & y'', & z'', & t'' \\ x''', & y''', & z''', & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix} \,. \qquad (2)$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z, parexemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}$, $\bar{x}$, $\bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$ (fig. 2).