

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES
Kapitel: §2. — Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.
Autor: Sintsof, D.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21867>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

données homogènes des trois points et l'aire du triangle qu'ils forment.

Passons à l'espace.

§ 2. — *Le volume d'un tétraèdre en coordonnées tétraédriques.*

Prenons pour le système des coordonnées tétraédriques x, y, z, t , les quatre perpendiculaires abaissées d'un point M sur les quatre plans d'un certain tétraèdre fondamental. Soient A, B, C, D les 4 sommets, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les aires des faces opposées, on a

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z + \delta \cdot t = 3 \cdot V_0. \quad (1)$$

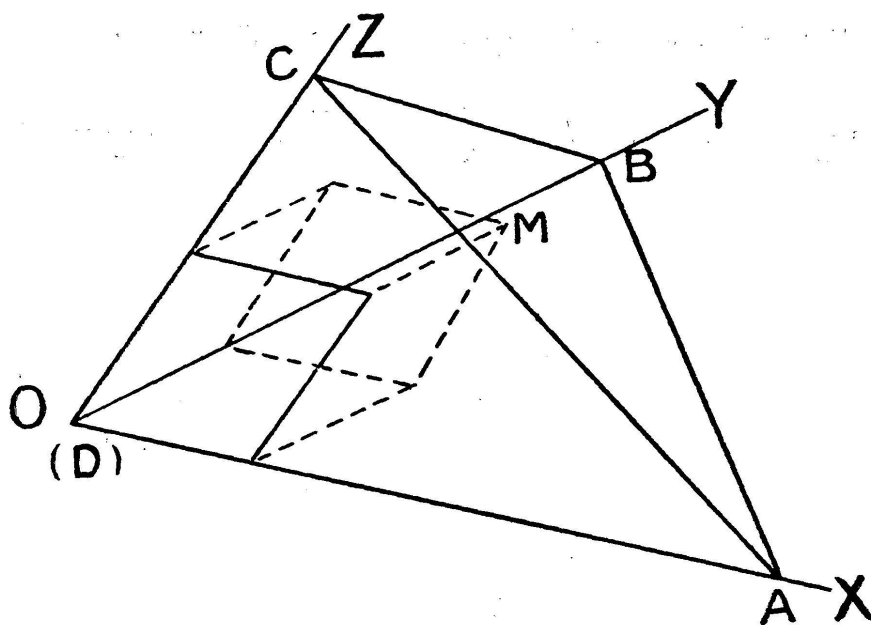


Fig. 2.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{3V_0}{\delta} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & y' & z' & 1 \\ x'' & y'' & z'' & 1 \\ x''' & y''' & z''' & 1 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Choisissons à présent un système des coordonnées non-homogènes obliquangles ayant pour plans les 3 plans du tétraèdre fondamental — alors z , par exemple, est la hauteur du parallélépipède dont les arêtes sont $\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}$, — de sorte que $z = \bar{z} \cos(z, \bar{z})$ (fig. 2).

De même

$$y = \bar{y} \cdot \cos (y, \bar{y}) ,$$

$$x = \bar{x} \cdot \cos (x, \bar{x}) .$$

Ainsi

$$(xy'z''t''') = (\bar{x} \cdot \bar{y}' \cdot \bar{z}'' \cdot 1) \cdot \frac{3V_0}{\delta} \cos (x, \bar{x}) \cdot \cos (y, \bar{y}) \cos (z, \bar{z}) .$$

Du point O comme centre décrivons une sphère de rayon 1, soient X, Y, Z les 3 points de rencontre de cette sphère avec les axes des coordonnées obliques; soient

$$\sphericalangle YOX = \lambda , \quad \sphericalangle XOZ = \mu , \quad \sphericalangle YOZ = \nu .$$

Nous aurons un triangle sphérique, dont les hauteurs (fig. 3)

$$h_\lambda = \frac{\pi}{2} - (z, \bar{z}) , \quad h_\mu = \frac{\pi}{2} - (y, \bar{y}) , \quad h_\nu = \frac{\pi}{2} - (x, \bar{x})$$

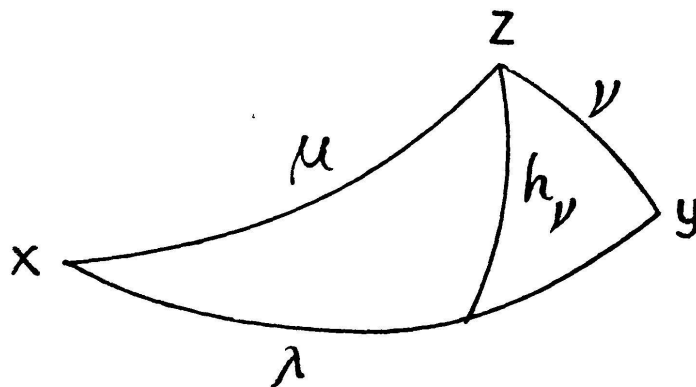


Fig. 3.

sont à calculer. Désignons les angles du triangle sphérique XYZ respectivement par X, Y, Z.

Alors

$$\sin h_\lambda = \sin \mu \cdot \sin X = \sin \nu \cdot \sin Y .$$

Soit

$$\lambda + \mu + \nu = 2s .$$

D'après les formules connues de la trigonométrie sphérique

$$\sin X = 2 \frac{\sqrt{\sin s \cdot \sin (s - \lambda) \cdot \sin (s - \mu) \cdot \sin (s - \nu)}}{\sin \lambda \cdot \sin \mu} = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda \sin \mu} .$$

De même

$$\sin Y = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda \cdot \sin \nu}, \quad \sin z = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \nu \sin \mu}.$$

Donc

$$\sin h_\lambda = \cos(z, \bar{z}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda},$$

$$\sin h_\mu = \cos(y, \bar{y}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \mu},$$

$$\sin h_\nu = \cos(x, \bar{x}) = \frac{2\sqrt{P}}{\sin \nu}.$$

Ainsi

$$(xy'z''l''') = \frac{8 \cdot 3 \cdot V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} (\bar{x}\bar{y}'\bar{z}'', 1). \quad (3)$$

Mais ce n'est pas encore la relation définitive. Il est intéressant d'établir le multiplicateur exact. Introduisons un système de coordonnées dont l'axe $O\xi$ coïncide avec l'axe $O\bar{X}$, OH étant situé dans le plan $\bar{X}O\bar{Y}$ et perpendiculaire à $O\bar{X}$, enfin OZ étant perpendiculaire au plan $\bar{X}O\bar{Y}$.

Nous aurons pour le tableau des 9 cosinus:

	$O\xi$	OH	OZ
$\bar{O}X$	1	0	0
$\bar{O}Y$	$\cos \lambda$	$\sin \lambda$	0
$\bar{O}Z$	$\cos \mu$	$\cos U$	$\cos W$

Les angles U et W sont à déterminer à l'aide des relations de la forme

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & \cos \alpha \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & \cos \beta \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Pour déterminer $\cos W$ nous substituons les angles de OZ :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & 0 \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & 0 \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos W \\ 0 & 0 & \cos W & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 - \cos^2 W \end{vmatrix},$$

ou enfin

$$4P - \cos^2 W \cdot \sin^2 \lambda = 0,$$

d'où l'on tire

$$\cos W = \pm \frac{\sqrt{P}}{\sin \lambda}. \quad (5)$$

De même pour le calcul de $\cos U$ nous avons à substituer dans (4) les angles de OH, ce qui donne

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu & 0 \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu & \sin \lambda \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 & \cos U \\ 0 & \sin \lambda & \cos U & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \cos U = \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda}, \quad (6)$$

Ainsi les formules de transformation deviennent

$$\bar{X} + \bar{Y} \cos \lambda + \bar{Z} \cos \mu = \xi,$$

$$\bar{X} \cos \lambda + \bar{Y} + \bar{Z} \cos \nu = \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda,$$

$$\bar{X} \cos \mu + \bar{Y} \cos \nu + \bar{Z} = \xi \cos \mu + \eta \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda}.$$

Formons à présent le déterminant

$$\begin{vmatrix} \xi, \xi \cos \lambda + \eta \sin \lambda, \xi \cos \mu + \eta \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi', \xi' \cos \lambda + \eta' \sin \lambda, \xi' \cos \mu + \eta' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi'', \xi'' \cos \lambda + \eta'' \sin \lambda, \xi'' \cos \mu + \eta'' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta'' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \\ \xi''', \xi''' \cos \lambda + \eta''' \sin \lambda, \xi''' \cos \mu + \eta''' \frac{\cos \nu - \cos \lambda \cos \mu}{\sin \lambda} + \zeta''' \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} \end{vmatrix}$$

Il est égal, comme il est facile à voir, à

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta & 1 \\ \xi' & \eta' & \zeta' & 1 \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' & 1 \\ \xi''' & \eta''' & \zeta''' & 1 \end{vmatrix} \times \sin \lambda \times \frac{2\sqrt{P}}{\sin \lambda} = 6V \cdot 2\sqrt{P}. \quad (7)$$

Mais, d'autre part, ce déterminant est égal à

$$\begin{vmatrix} \bar{X} + \bar{Y} \cos \lambda + \bar{Z} \cos \mu, & \bar{X} \cos \lambda + \bar{Y} + \bar{Z} \cos \nu, & \bar{X} \cos \mu + \bar{Y} \cos \nu + \bar{Z}, & 1 \\ \bar{X}' + \bar{Y}' \cos \lambda + \bar{Z}' \cos \mu, & \bar{X}' \cos \lambda + \bar{Y}' + \bar{Z}' \cos \nu, & \bar{X}' \cos \mu + \bar{Y}' \cos \nu + \bar{Z}', & 1 \\ \bar{X}'' + \bar{Y}'' \cos \lambda + \bar{Z}'' \cos \mu, & \bar{X}'' \cos \lambda + \bar{Y}'' + \bar{Z}'' \cos \nu, & \bar{X}'' \cos \mu + \bar{Y}'' \cos \nu + \bar{Z}'', & 1 \\ \bar{X}''' + \bar{Y}''' \cos \lambda + \bar{Z}''' \cos \mu, & \bar{X}''' \cos \lambda + \bar{Y}''' + \bar{Z}''' \cos \nu, & \bar{X}''' \cos \mu + \bar{Y}''' \cos \nu + \bar{Z}''', & 1 \end{vmatrix},$$

que l'on transforme facilement en

$$\begin{vmatrix} (\bar{X}' - \bar{X}) + (\bar{Y}' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}' - \bar{Y}) + (\bar{Z}' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}' - \bar{Z}) & & \\ (\bar{X}'' - \bar{X}) + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}'' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}'' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}'' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}'' - \bar{Z}) & & \\ (\bar{X}''' - \bar{X}) + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) \cos \lambda + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) \cos \mu, & & & \\ (\bar{X}''' - \bar{X}) \cos \lambda + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) \cos \nu, & (\bar{X}''' - \bar{X}) \cos \mu + (\bar{Y}''' - \bar{Y}) \cos \nu + (\bar{Z}''' - \bar{Z}) & & \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \bar{X}' - \bar{X}, & \bar{Y}' - \bar{Y}, & \bar{Z}' - \bar{Z} \\ \bar{X}'' - \bar{X}, & \bar{Y}'' - \bar{Y}, & \bar{Z}'' - \bar{Z} \\ \bar{X}''' - \bar{X}, & \bar{Y}''' - \bar{Y}, & \bar{Z}''' - \bar{Z} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & \cos \lambda & \cos \mu \\ \cos \lambda & 1 & \cos \nu \\ \cos \mu & \cos \nu & 1 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \bar{X} & \bar{Y} & \bar{Z} & 1 \\ \bar{X}' & \bar{Y}' & \bar{Z}' & 1 \\ \bar{X}'' & \bar{Y}'' & \bar{Z}'' & 1 \\ \bar{X}''' & \bar{Y}''' & \bar{Z}''' & 1 \end{vmatrix} \cdot 4P. \quad (8)$$

Donc, revenant à la formule (A) nous aurons:

$$(xy'z''z''') = \frac{8 \cdot 3V_0}{\delta} \cdot \frac{P^{3/2}}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} \frac{6V \cdot 2\sqrt{P}}{4P}.$$

Donc, enfin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x' & y' & z' & t' \\ x'' & y'' & z'' & t'' \\ x''' & y''' & z''' & t''' \end{vmatrix} = \frac{72V_0}{\delta} \frac{P}{\sin \lambda \sin \mu \sin \nu} \cdot V \quad (9)$$

c'est la formule, que nous voulions établir.

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72V_0 P}{\delta \cdot \sin \lambda \sin \mu \sin \nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M', M'', M'''.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{x - a'}{l'} = \frac{y - b'}{m'} = \frac{z - c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma(mn' - nm')^2} \quad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2} \quad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2 + m^2 + n^2 = 1 = l'^2 + m'^2 + n'^2$. Nous avons

$$\delta \cdot \sin V = \begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Le produit $\delta \cdot \sin V$ est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1'). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en