§3. — Moment de deux droites.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Il est à remarquer que le facteur

$$\frac{72 V_0 P}{\delta \,.\, \sin\lambda \, \sin\mu \, \sin\nu}$$

ne dépend que du choix du tétraèdre de référence; il est le même pour tous les quatre points choisis M, M′, M″, M‴.

§ 3. — *Moment de deux droites.*

La plus courte distance de deux droites de l'espace

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1) \qquad \text{et} \qquad \frac{x-a'}{l'} = \frac{y-b'}{m'} = \frac{z-c'}{n'} \quad (1')$$

est donnée par la formule

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sqrt{\Sigma(mn'-nm')^2} \qquad (2)$$

ou bien

$$\delta = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} : \sin V \,.\, \sqrt{l^2+m^2+n^2} \,.\, \sqrt{l'^2+m'^2+n'^2} \qquad (2')$$

où V est l'angle de deux droites. L'expression devient plus simple si l, m, n, l', m', n' désignent les cosinus des angles, alors $l^2+m^2+n^2 = 1 = l'^2+m'^2+n'^2$. Nous avons

$$\delta \,.\, \sin V = \begin{vmatrix} a'-a & b'-b & c'-c \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} . \qquad (3)$$

Le produit $\delta \,.\, \sin V$ est ce qu'on appelle *le moment de deux droites* (1) et (1′). Le déterminant à droite égalé à zéro exprime que les deux droites se coupent. On peut donc dire que *les deux droites de l'espace se coupent si leur moment s'annule*, — en d'autres mots, si leur plus courte distance est nulle, ou bien si elles font un angle nul, c'est-à-dire si elles sont parallèles.

Dans les deux cas le volume d'un tétraèdre que l'on conçoit en prenant une paire de points sur chacune des deux droites, doit être nul; il est donc naturel de chercher relation entre le moment et le volume de ce tétraèdre.

Si l'on a déjà établi l'expression (1) de la plus courte distance il est facile de trouver cette relation. En effet, si l'on prend un point (x, y, z) sur la droite (1) et un autre (x', y', z') sur (1'), on a

$$l = \frac{x_1 - a}{\sqrt{\Sigma(x_1 - a)^2}}, \ldots, \qquad l' = \frac{x'_1 - a'}{\sqrt{\Sigma(x'_1 - a')^2}}.$$

Le déterminant au numérateur est égal à six fois le volume du tétraèdre (x_1, a, a', x'_1), et les racines carrées au dénominateur représentent les longueurs des arêtes opposées, c'est-à-dire

$$\delta . \sin V = \pm \frac{6V}{d . d'} . \tag{4}$$

Cette relation se simplifie si l'on prend les points x_1, x'_1 de manière que d et d' soient égales à l'unité de longueur. Elle exprime le théorème connu de géométrie du tétraèdre: *si l'on prend sur deux droites gauches deux longueurs finies, le volume du tétraèdre ainsi obtenu ne varie pas si l'on fait glisser ces longueurs le long des droites respectives sans changer leur valeur.*

Cette relation entre le moment de deux droites et le volume a déjà été donné par Cayley. Il établit la formule (4) de deux manières différentes.

1° La section du tétraèdre par le plan parallèle aux deux arêtes opposées à la distance de z et $\delta - z$ des deux extrémités de la plus courte distance δ a pour aire

$$\frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin V .$$

En intégrant entre les limites 0 et δ, on obtient le volume du tétraèdre

$$V = \int_0^\delta \frac{dd'(\delta - z)z}{\delta^2} \sin V . dz = \frac{1}{6} dd'\delta \sin V .$$

La 2$^{\text{me}}$ méthode est encore plus élémentaire. En ce point le texte de Cayley contient une faute de rédaction, il dit: par une des arêtes qui ne se coupent pas menons un plan *perpendiculaire à l'arête opposée* (ce qui est en général impossible et veut dire: perpendiculaire à la plus courte distance des deux arêtes). Le tétraèdre est décomposé en deux tétraèdres ayant pour base commune un triangle; le volume entier est égal à la somme (ou différence) des volumes de ces deux tétraèdres.

$$V = \frac{1}{3} S . (h_1 \pm h_2) , \quad h_1 \pm h_2 = d' \sin V \quad \text{et} \quad S = \frac{a\delta}{2} ,$$

ce qui ramène à la formule (4).

En résumé, à l'aide des développements du § 2 nous pouvons dire, qu'*en coordonnées homogènes tétraèdriques le moment de deux droites s'exprime — jusqu'à un multiplicateur dépendant seulement du choix du système de coordonnées — par le déterminant composé des coordonnées des deux paires de points pris sur les deux droites.* Cette remarque va être mise à profit dans la suite.

§ 4. — *Expression du moment de deux droites en coordonnées de la droite.*

Prenons les coordonnées homogènes de la droite p_{ix}, liées par la relation

$$P \equiv (p , p) \equiv p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0 . \tag{1}$$

La condition pour que deux droites p et p' se coupent est alors

$$(p , p') = \Sigma \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} p'_{ik} = 0 . \tag{2}$$

Ce n'est autre chose, à un facteur près, que le volume du tétraèdre formé par deux segments de longueur 1 pris sur l'une et l'autre droite. En effet, si x, y sont deux points de la première droite, on a

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i ,$$

à un facteur près; si ξ, η sont deux points de la seconde,

$$p'_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i ;$$