§5. — Applications à la théorie des connexes ternaires.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ainsi donc

$$(p, p') = \Sigma(x_1 y_2)(\xi_3 \eta_4) \equiv \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix},$$

et d'après § 2

$$= 6\lambda . \mathrm{V} ,$$

donc d'après § 3

$$= \lambda . \delta . \sin \mathrm{V} .$$

Ainsi

$$\delta . \sin \mathrm{V} = \lambda' . (p, p') . \qquad (3)$$

Deuxième Partie: Applications.

§ 5. — *Applications à la théorie des connexes ternaires.*

1. — Soient (x, u), (y, v) deux éléments (point, droite) du plan connexe, et soient a la droite (xy), A le point (uv). Les coordonnées de A sont proportionelles aux mineurs de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \right\| .$$

Donc l'aire du triangle Axy, à un facteur près dépendant du choix du système des coordonnées, est représentée par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix} \equiv \Sigma(u_i v_k)(x_i x_k) \equiv u_x v_y - v_x u_y$$

donnée dans mon mémoire cité plus haut.

Mais nous pourrions considérer un autre triangle, notamment celui formé par les droites u, v, $a \equiv (xy)$. D'après une formule connue (G. Salmon, *Sections coniques*, nº 39, p. 53) son aire a pour expression

$$\frac{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ (xy)_1 & (xy)_2 & (xy)_3 \end{vmatrix}^2}{(u_1 v_2)(v_1 (xy)_2) \cdot ((xy)_1 u_2)},$$

ou bien, calculs faits:

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_1 v_2 - u_2 v_1)(x_3 v_y - y_3 v_x)(u_x y_3 - u_y x_3)},$$

formule qui n'est pas symétrique.

Cherchons une autre formule plus symétrique. Soient $\bar{x}$, $\bar{y}$ les points d'intersection de la droite $(x, y) \equiv a$ avec les droites u et v; de sorte que $u_{\bar{x}} = 0$, $v_{\bar{y}} = 0$. On peut alors poser

$$\bar{x} = \lambda x + \mu y, \qquad \bar{y} = \lambda' x + \mu' y,$$

avec

$$\lambda u_x + \mu u_y = 0, \qquad \lambda' v_x + \mu' v_y = 0.$$

Pour fixer les valeurs absolues de λ, μ, λ', μ' ajoutons les relations

$$\lambda + \mu = 1, \qquad \lambda' + \mu' = 1.$$

Alors

$$\lambda = \frac{-u_y}{u_x - u_y}, \qquad \mu = \frac{u_x}{u_x - u_y},$$

$$\lambda' = \frac{-v_y}{v_x - v_y}, \qquad \mu' = \frac{v_x}{v_x - v_y}.$$

L'aire double du triangle A$\bar{x}$, $\bar{y}$ ($\equiv uva$) est donc, à un facteur constant près,

$$\begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \bar{x}_3 \\ \bar{y}_1 & \bar{y}_2 & \bar{y}_3 \end{vmatrix} \equiv (\lambda\mu' - \mu\lambda') \begin{vmatrix} (uv)_1 & (uv)_2 & (uv)_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & x_3 \end{vmatrix}$$

ou bien

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_x - u_y)(v_x - v_y)}.$$

La même formule peut être établie en calculant directement les coordonnées des points $\bar{x}$, $\bar{y}$ par les équations

$$u_{\bar{x}} \equiv u_1 \bar{x}_1 + u_2 \bar{x}_2 + u_3 \bar{x}_3 = 0, \qquad (\bar{x} x_2 y_3) = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\bar{x}_1}{x_1 u_y - y_1 u_x} = \frac{\bar{x}_2}{x_2 u_y - y_2 u_x} = \frac{\bar{x}_3}{x_3 u_y - y_3 u_x}.$$

De même les équations $v_y = 0$, $(\bar{y} x_2 y_3) = 0$ donnent:

$$\frac{\bar{y}_1}{x_1 v_y - y_1 v_x} = \frac{\bar{y}_2}{x_2 v_y - y_2 v_x} = \frac{\bar{y}_3}{x_3 v_y - y_3 v_x} .$$

Enfin, les coordonnées du point A sont proportionnelles à

$$(u_2 v_3) , \qquad (u_3 v_1) , \qquad (u_1 v_2) .$$

Donc, l'aire double du triangle $A\bar{x}\bar{y}$, à un facteur près, est égal au déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 u_y - y_1 u_x & x_2 u_y - y_2 u_x & x_3 u_y - y_3 u_x \\ x_1 v_y - y_1 v_x & x_2 v_y - y_2 v_x & x_3 v_y - y_3 v_x \\ u_2 v_3 - u_3 v_2 & u_3 v_1 - u_1 v_3 & u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{vmatrix} \equiv (u_x v_y - u_y v_x) \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ (u_2 v_3) & (u_3 v_1) & (u_1 v_2) \end{vmatrix}$$

$$\equiv (u_x v_y - u_y v_x)^2 .$$

Reste à déterminer le facteur de proportionnalité (dans le cas du système considéré au § 1).

D'après (1) pour le premier point:

$$2\Delta_0 = \Sigma a_i V_i = H(u_y \Sigma a_i x_i - u_x \Sigma a_i y_i)$$

$$= 2\Delta_0 (u_y - u_x) H \quad \therefore \quad H = \frac{1}{u_y - u_x} .$$

De même pour le second point nous trouvons

$$H' = \frac{1}{v_y - v_x} ,$$

et nous arrivons de nouveau à la formule

$$\frac{(u_x v_y - u_y v_x)^2}{(u_y - u_x)(v_y - v_x)} .$$

2. — Soit à présent (y, v) l'élément du connexe conjugué qui correspond à l'élément (x, u). Alors

$$u_y = 0 , \qquad v_x = 0 .$$

L'expression du moment se ramène à

$$- u_x v_y .$$

Pour de telles paires d'éléments les deux triangles, dont nous avons parlé au n° 1 coïncident, et les deux expressions de l'aire sont identiques.

Le triangle se ramène à un point (une droite) dans deux cas: 1° u passe non seulement par y, mais aussi par x.

$$u_x = 0 .$$

2° v passe non seulement par x, mais aussi par y:

$$v_y = 0 .$$

Donc: *le moment de deux éléments correspondants d'un connexe ternaire et de son conjugné s'annule si l'un ou l'autre appartient à la coïncidence principale correspondante.*

Remarque. — Dans le cas général de deux éléments (x, u), (y, v) quelconques leur moment s'annule dans les trois cas:

1° Les points x et y coïncident;
2° Les droites u et v coïncident;
3° Le point A est sur la droite a.

3. — *Connexe bilinéaire* (collinéation):

$$f \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma a_{ik} \alpha_i u_k = 0 . \qquad (1)$$

Les éléments correspondants

$$\rho y_i = a_x \alpha_i , \quad \sigma v_i = a_i u_\alpha \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (2)$$

forment le connexe conjugué

$$(abv)(\alpha\beta\eta) = 0 .$$

Si l'on calcule le dernier, on obtient (changeant y, v en x, u)

$$i^2 . g(x, u) = u_x(i^2 - i_1) - 2if + 2f_1 .$$

De (2) on déduit

$$v_y = a_x u_\beta b_\alpha \equiv f_1(x, u) ,$$

$$v_x = \Sigma a_i x_i u_\alpha = u_\alpha a_x = f(x, u) ,$$

$$u_y = a_x \Sigma \alpha_i u_i = a_x u_\alpha = f(x, u) .$$

Donc

$$u_x v_y - u_y v_x \equiv u_x f_1(x, u) - f^2(x, u) .$$

Ainsi les éléments du connexe bilinéaire pour lesquels le moment (au sens du n° 2) est nul appartiennent au connexe identique ou à $f_1(x, u) = 0$, — ce n'est qu'un cas particulier de ce qui a été dit au n° 2 pour le connexe général.

Enfin, si l'élément (x, u) n'appartient pas au connexe (1), le moment de (x, u) et de son transformé par (1) est nul, s'il appartient au connexe (2, 2)

$$u_x f_1(x_1 u) - f^2(x_1 u) = 0$$

dans lequel à chaque droite u correspond une courbe de 2^me^ ordre ayant double contact avec la conique dégénérée — paire de droites u et u'' et pour corde de contact la droite u', si l'on désigne les transformées collinéaires successives de u en collinéation (1) par u', u'', ...

Réciproquement, au point donné x appartient une courbe de 2^me^ classe passant par les points x, x'' et dont les tangentes correspondantes se coupent en x'.

§ 6. — *Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).*

Comme j'ai indiqué au commencement, la notion du moment de deux droites trouve son application dans la théorie des connexes quaternaires ayant pour l'élément la combinaison (point, plan). Si l'on prend deux éléments pareils (x, u), (y, v), leurs points x, y déterminent une droite $p \equiv (xy)$, et leurs plans u, v une autre $p' = (uv)$. On peut donc déterminer le moment de ces droites, et c'est ce que je nomme *le moment de deux éléments du connexe* (x, u).

Son expression analytique s'exprime par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \end{vmatrix} \equiv \Sigma (x_i y_k - x_k y_i)(u_i v_k - u_k v_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$