Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE MOMENT DE DEUX DROITES ET SON APPLICATION DANS LA THÉORIE DES CONNEXES

Kapitel: §6. — Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).

Autor: Sintsof, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21867

Donc

$$u_x v_y - u_y v_x \equiv u_x f_1(x, u) - f^2(x, u) .$$

Ainsi les éléments du connexe bilinéaire pour lesquels le moment (au sens du n° 2) est nul appartiennent au connexe identique ou à $f_1(x, u) = 0$, — ce n'est qu'un cas particulier de ce qui a été dit au n° 2 pour le connexe général.

Enfin, si l'élément (x, u) n'appartient pas au connexe (1), le moment de (x, u) et de son transformé par (1) est nul, s'il appartient au connexe (2, 2)

$$u_x f_1(x_1 u) - f^2(x_1 u) = 0$$

dans lequel à chaque droite u correspond une courbe de 2^{me} ordre ayant double contact avec la conique dégénérée — paire de droites u et u'' et pour corde de contact la droite u', si l'on désigne les transformées collinéaires successives de u en collinéation (1) par u', u'', ...

Réciproquement, au point donné x appartient une courbe de 2me classe passant par les points x, x'' et dont les tangentes correspondantes se coupent en x'.

§ 6. — *Le moment dans la théorie des connexes avec élément (point, plan).*

Comme j'ai indiqué au commencement, la notion du moment de deux droites trouve son application dans la théorie des connexes quaternaires ayant pour l'élément la combinaison (point, plan). Si l'on prend deux éléments pareils (x, u), (y, v), leurs points x, y déterminent une droite $p \equiv (xy)$, et leurs plans u, v une autre $p' = (uv)$. On peut donc déterminer le moment de ces droites, et c'est ce que je nomme *le moment de deux éléments du connexe* (x, u).

Son expression analytique s'exprime par la formule

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \\ p'_1 & p'_2 & p'_3 & p'_4 \end{vmatrix} \equiv \Sigma (x_i y_k - x_k y_i)(u_i v_k - u_k v_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4) ,$$

car $p'_{12} = \pi_{34} = (u_3 v_4)$ et ainsi de suite.

Donc, à un facteur près, nous avons

$$M\begin{pmatrix} x\,u \\ y\,v \end{pmatrix} \equiv \Sigma(u_i x_i v_k y_k - v_k x_k u_i y_i - v_i x_i u_k y_k + u_k x_k v_i y_i)$$
$$\equiv 2(u_x v_y - u_y v_x) \; .$$

Prenons un élément (x, u) quelconque et son correspondant dans le connexe conjugué (y, v). Nous aurons pour le moment de ses deux éléments

$$M\begin{pmatrix} (x\,,\,u) \\ (y\,,\,v) \end{pmatrix} = \frac{2}{\rho\sigma}\left(u_k \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} - mnf^2(x\,,\,u)\right) \, ,$$

parce que

$$\rho y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i} \, , \qquad \sigma v_k = \frac{\partial f}{\partial x_k} \, ,$$

donc

$$\rho \, . \, u_y = \Sigma u_i \frac{\partial f}{\partial u_i} = n \, . \, f(x\,,\,u) \; ,$$

$$\sigma \, . \, v_x = \Sigma x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} = m \, . \, f(x\,,\,u) \; .$$

Si l'élément (x, u) appartient au connexe $f(x, u) = 0$, son moment par rapport à l'élément correspondant du connexe conjugué devient

$$\rho\sigma \, . \, M\begin{pmatrix} x\,u \\ y\,v \end{pmatrix} \equiv u_x \, . \, \Sigma \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \; .$$

Ainsi, *si l'élément* (x, u) *appartient à la coïncidence principale du connexe donné*

$$(f(x\,,\,u) = 0 \; , \quad u_x = 0)$$

ou son correspondant (y, v) *appartient à la coïncidence principale du connexe conjugué, le moment de ces deux éléments est nul.*

La réciproque est vraie: *si le moment d'un élément du connexe donné et de son correspondant au connexe conjugué est nul, l'un ou l'autre appartiennent à la coïncidence principale correspondante.*

Nous pouvons dire encore: Si pour chaque élément du connexe donné $f(x, u) = 0$ nous avons

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} = 0 \; ,$$

ou si l'on a identiquement

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \equiv k \, . \, f(x, u)$$

le moment de chaque élément et de son conjugué au connexe $f(xu) = 0$ est nul. Dans ce cas le connexe conjugué du (1) est le connexe identique [1].

§ 7. — *Moment de deux droites dans la théorie des connexes aux éléments (point, droite) dans le* R_3.

1\. — Considérons un connexe lineo-linaire défini par l'équation

$$\Sigma a_{i,\,kj} x_i p_{kj} = 0 \qquad (1)$$

que l'on peut écrire aussi

$$\Phi(\overset{1}{x} \; ; \overset{1}{p}) \equiv \Sigma \Phi_j x_i \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj}$$

ou symboliquement

$$a_x (\mathfrak{a}\mathfrak{a}pp) \equiv a_x \mathfrak{a}_p^2$$

De l'ensemble des ∞^7 éléments (point, droite) de l'espace, l'équation (1) détache ∞^6 éléments, que l'on peut caractériser de cette manière: à chaque point X correspondent (c'est-à-dire forment avec X l'élément de la configuration) ∞^3 droites du complexe linéaire

$$P(x) \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj} = 0 \; ; \qquad (2)$$

parmi ces complexes il y a ∞^2 complexes spéciaux, qui correspondent aux points d'une surface du 2^{me} ordre

$$\Phi^{(1)}_{12} \Phi^{(1)}_{34} + \Phi^{(1)}_{13} \Phi^{(1)}_{42} + \Phi^{(1)}_{14} \Phi^{(1)}_{23} = 0 \equiv a_x a'_x (\mathfrak{a}\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') \; . \qquad (3)$$

A chaque point de cette surface correspond une droite, avec

[1] Ceci donne l'idée de considérer les connexes qui sont des transformations rationnelles du connexe identique: si nous avons un connexe quaternaire

$$\Sigma_k \varphi_k(x, u) \psi_k(x, u) = 0 \qquad (k = 1 \dots 4)$$

où φ_k — du degré k en x et du h en u, et ψ_k — du degré $m - k$ en x, $n - h$ en u, à l'aide de la transformation $\varrho u_k = \varphi_k(x, u)$, $\sigma v_k = \psi_k(x, u)$, nous le transformons en $v_y = 0$.