I

sans recourir à aucune représentation approchée, exponentielle ou autre, et que l'étude directe donne des renseignements d'un grand intérêt sur les statistiques [1].

I

1. — Tout d'abord, la formule de Stirling permet d'écrire, en logarithmes décimaux:

$$\log y_x = -\log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\log\frac{m}{(mp-x)(mq+x)} + (mp-x)\log\frac{mp}{mp-x}$$

$$+ (mq+x)\log\frac{mq}{mq+x} + \frac{M}{12m} - \frac{M}{12}\times\frac{m}{(mp-x)(mq+x)}\ ;$$

$$-\log\sqrt{2\pi} = \bar{1},6009101\ ; \qquad M = \log e = 0,4342945\ . \qquad (2)$$

Cette formule donne y_x avec 5 décimales exactes, quand on prend les logarithmes avec 7 décimales.

On peut donc calculer, avec une approximation dépassant les besoins de toutes les statistiques, les valeurs numériques de y_x pour toutes les valeurs possibles de m ($m>0$, entier ou non entier), de p ($0<p<1$), de q ($p+q=1$), de x ($mp-x$, $mq+x$ entiers ou fractionnaires, mais $mp-x \geqq 0$, $mq+x \geqq 0$).

Quand m, $mp-x$, $mq+x$ sont entiers, on peut aussi calculer y_x par les Tables de factorielles [2]: les deux procédés donnent les mêmes résultats.

2. — Soit

$$y_x = \frac{1000\,!}{(100-x)\,!\,(900+x)\,!}\,0,1^{100-x}\times 0,9^{900+x}\ ,$$

c'est la formule (1) pour $m = 1000$; $p = 0,1$; $q = 0,9$. Dans le problème de 1000 tirages de boules d'une urne contenant 9 fois

[1] Le lecteur voudra bien se reporter pour les démonstrations des formules qui vont être données aux *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1927 et 1928.

[2] F. J. DUARTE, Tables de log $n!$ à 33 décimales, pour toutes les valeurs entières de n, de $n = 1$ à $n = 3000$. Imprimerie A. Kundig à Genève, 1927, 30 fr. fr.

plus de boules rouges que de boules noires, on sera amené à calculer [1]

$$y_0 = 0{,}042\,017\ ;\quad y_1 = 0{,}041\,970\ ;\quad y_2 = 0{,}041\,458\ ;\quad y_3 = 0{,}040\,494\ \ldots$$
$$y_{-1} = 0{,}041\,601\ ;\quad y_{-2} = 0{,}040\,740\ ;\quad y_{-3} = 0{,}039\,466\ \ldots$$

Mais, *perdant de vue ce problème de boules tirées d'une urne*, on peut de façon semblable, calculer (form. 1) les valeurs de y pour

$$x = h\ ,\quad x = 1 + h\ ;\quad x = 2 + h\ ,\ \ldots,\quad x = -1 + h\ ,$$
$$x = -2 + h\ ,\ \ldots$$

h étant une constante numérique quelconque: la formule (2) le permet.

Aussi bien, mettant la constante h en évidence, *ce n'est plus la fonction* (1) *que nous étudierons*, *c'est la fonction plus générale.*

$$y_{x+h} = \frac{m\,!}{(mp - x - h)\,!\ (mq + x + h)\,!}\, p^{mp-x-h}\, q^{mq+x+h} \qquad (3)$$

où:

m est un nombre positif quelconque, entier ou fractionnaire,

p, q sont des nombres compris entre 0 et 1, dont la somme est 1;

h est un nombre positif ou négatif, ordinairement fractionnaire, voisin dans les applications, de 0, 1, —1;

x est un nombre *entier*, positif ou négatif: il n'y a pas lieu, dans l'étude des statistiques, de considérer des valeurs fractionnaires de x; les valeurs de x doivent vérifier les inégalités

$$mp - x - h \geqq 0\ ,\qquad mq + x + h \geqq 0\ .$$

3. — On calcule les valeurs de y_{x+h} par la formule suivante, qui n'est autre que la formule (2) légèrement modifiée

$$\log y_{x+h} = -\log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\log\frac{m}{(mp - x - h)\,(mq + x + h)}$$
$$+ (mp - x - h)\log\frac{mp}{mp - x - h} + (mq + x + h)\log\frac{mq}{mq + x + h}$$
$$+ \frac{M}{12\,m} - \frac{M}{12} \times \frac{m}{(mp - x - h)\,(mq + x + h)}\ ; \qquad (4)$$

$$-\log\sqrt{2\pi} = \bar{1}{,}6009101\ ;\qquad M = \log e = 0{,}434\,2945 \quad \text{(log. décimaux)}$$

---

[1] Le lecteur trouvera quantités de tableaux de valeurs numériques de y_x dans: *Annales Soc. Sc. Brux.*, 1926; *Mém.* N° 10 de *l'Office nat. météor. de France; Calcul des probabilités et statistiques*, par R. DE MONTESSUS DE BALLORE, Chiron, Paris, 1926.

Mais quand on a plusieurs valeurs de y_{x+h} à calculer, il est plus simple, plus rapide, de calculer seulement y_h par la formule

$$\log y_h = -\log\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\log\frac{m}{(mp-h)(mq+h)}$$

$$+ (mp-h)\log\frac{mp}{mp-h} + (mq+h)\log\frac{mq}{mq+h}$$

$$+\frac{\mathrm{M}}{12m} - \frac{\mathrm{M}}{12}\times\frac{m}{(mp-h)(mq+h)}\;; \quad -\log\sqrt{2\pi} = \bar{1},600\,9101\;;$$

$$\mathrm{M} = \log e = 0,434\,2945 \quad \text{(log. décimaux)}\,, \tag{5}$$

et de calculer *ensuite* les autres valeurs de y_h par les formules de récurrence

$$y_{-1+h} = \frac{mq+h}{mp-h+1}\frac{p}{q}y_h\,, \quad y_{-2+h} = \frac{mq+h-1}{mp-h+2}\frac{p}{q}y_{-1+h}\,,$$

$$y_{-3+h} = \frac{mq+h-2}{mp-h+3}\frac{p}{q}y_{-2+h}\,, \ldots \tag{6}$$

$$y_{1+h} = \frac{mp-h}{mq+h+1}\frac{q}{p}y_h\,, \quad y_{2+h} = \frac{mp-h-1}{mq+h+2}\frac{q}{p}y_{1+h}\,,$$

$$y_{3+h} = \frac{mp+h-2}{mq+h+3}\frac{q}{p}y_{2+h}\,, \ldots \tag{7}$$

Les formules générales sont

$$y_{-x+h} = \frac{mq+h-(x-1)}{mp-h+x}\frac{p}{q}y_{-x+1+h}\,, \tag{6'}$$

$$y_{x+h} = \frac{mp-h-(x-1)}{mq+h+x}\frac{p}{q}y_{x-1+h}\,. \tag{7'}$$

4. — Ce ne sont pas précisément les nombres y_x de la formule (3) que nous allons considérer, mais les nombres

$$\mathrm{Y}_{x+h} = \mathrm{A}\frac{m\,!}{(mp-x-h)\,!\,(mq+x+h)}\,p^{mp-x-h}\,q^{mq+x+h} = \mathrm{A}y_{x+h}$$

$$\text{(A constante positive quelconque)} \tag{8}$$

les nombres Y_{x+h} obéissent, comme les nombres y_x, aux lois de récurrence (6) et (7).