LES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES ET LES GROUPES CONTINUS

PAR

D. Pompeiu (Bucarest).

1. — En Mathématiques élémentaires, lorsque l'on présente, pour la première fois, la notion de *progression*, cette notion reste attachée à une suite de nombres se déduisant, à partir du premier, par une loi extrêmement simple.

Plus tard, lorsque la figuration géométrique vient en aide aux raisonnements sur les nombres, il est facile de faire voir que si l'on prend sur un axe Ox (l'axe des *abscisses*) des points équidistants: $x_0, x_1, x_2, \dots$ et si l'on porte sur des perpendiculaires, à partir de ces points, les valeurs (algébriques) correspondantes:

$$y_0, y_1, y_2, \dots$$

des termes de la *suite arithmétique*

$$y_{k+1} = y_k + b ,$$

on obtient des points $M_k(x_k, y_k)$ *tous* situés sur une même *ligne droite.*

De sorte que, au fond, toute la théorie élémentaire des progressions arithmétiques correspond à l'étude de certaines propriétés simples relatives aux suites de points, *régulièrement distribués*, sur une droite

$$y = px + q$$

au moyen de la transformation

$$x_{k+1} = x_k + a , \qquad y_{k+1} = y_k + b .$$

C'est surtout la notion d'*interpollation* (insertion de nouveaux termes) qui gagne à être interprétée géométriquement: on voit clairement qu'on peut *resserrer* ou *raréfier* les points sur la droite. Mais il y a plus: lorsque l'on forme un terme y_{k+1} de la suite, à partir du précédent, par l'opération

$$y_{k+1} = y_k + b \, . \qquad (x_{k+1} = x_k + a)$$

on peut supposer que l'on applique la même opération à tous les termes de la suite, de sorte que, géométriquement, il s'agit du *glissement* de la droite sur elle-même: le point M_k vient occuper la place qu'avait M_{k+1}, tandis que M_{k+1}, lui-même, s'en va prendre la place de M_{k+2}, et ainsi de suite...

Si, au lieu de M_0 comme point initial (y_0, x_0) on avait pris un autre point $M_0'(y_0', x_0)$ non situé sur la première droite, on trouverait une droite parallèle à la première.

2. — Des considérations tout-à-fait analogues, s'appliquent à la notion de progression par quotient.

Une figuration géométrique semblable à celle qui a servi pour la progression arithmétique, conduit l'élève à penser, qu'il s'agit, ici aussi, de points situés sur une même courbe, sur laquelle (par des opérations de *même nature*) on peut *resserrer* ou *raréfier*, à volonté, les points régulièrement distribués.

Cette ligne, qui n'est pas une courbe élémentaire, reste, pour le moment, caractérisé, par la propriété suivante:

Toute ordonnée y_k *est moyenne géométrique entre deux ordonnées voisines et équidistantes:*

$$y_k^2 = y_{k-1}\, y_{k+1} \, . \tag{1}$$

C'est, d'ailleurs, une propriété extrêmement simple exprimée d'une façon élémentaire.

Plus tard, lorsque les connaissances mathématiques seront plus avancées, on pourra transformer la relation (1) et l'écrire successivement

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = \frac{y_k}{y_{k-1}}$$

et

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{y_k} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_{k-1}}$$

ou encore

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{y_{k-1}},$$

ou enfin

$$y_{k-1}\,(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) = (y_k - y_{k-1})^2$$

et, si l'on divise partout par $(x_k - x_{k-1})^2$,

$$y_{k-1}\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{(x_k - x_{k-1})^2} = \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (2)$$

C'est une relation de récurrence, absolument équivalente à (1), mais sous cette forme (2) on voit que si l'on *resserre* les points de la *suite géométrique* on est tenté, si l'on admet (ce qui, d'ailleurs, peut être démontré en toute rigueur) que ces points se trouvent sur la même courbe continue, possédant tangente et courbure, on est tenté de passer à la limite et d'écrire

$$y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \qquad (3)$$

qui est effectivement l'équation différentielle de la fonction

$$y = \mathrm{A}\,e^{hx} \qquad (4)$$

ou courbe de la *croissance organique.*

3. — Arrêtons-nous un instant à l'équation différentielle (3) obtenue par le passage à la limite dans la relation (2).

Cet exemple nous montre que la notion d'*équation différentielle* peut être introduite aussi par une autre voie que celle classique: *résultat d'élimination de constantes entre relations obtenues, par dérivations à partir de la relation initiale.*

Dans le cas simple de la courbe (4) nous sommes partis du *phénomène élémentaire* (1), comme aurait dit Poincaré (*Rapport* au Congrès international de Physique, à Paris, 1900) et la relation de récurrence (2) nous a montré, pour parler toujours le langage des Sciences physiques, que le phénomène observable, en l'espèce la courbe (4), est dû à la superposition d'un grand nombre de phénomènes élémentaires *tous semblables entre eux:* ainsi s'introduit tout naturellement l'équation différentielle.

(J'ai reproduit les propres termes de Poincaré, dans le rapport cité.)

Dans le cas de la progression arithmétique, il y a *ligne droite* et le *phénomène élémentaire* est la relation

$$y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1} = 0$$

qui donne

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

comme équation différentielle.

4. — Autre exemple. Si l'on considère la suite de points, définie par la relation

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + a \,, \\ y_{k+1} &= y_k + b + \beta x_k \,, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{5}$$

on reconnaît facilement que tous ces points se trouvent sur une même *parabole*

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

et, inversement: une parabole étant donnée et ayant choisi l'intervalle a entre les points équidistants x_k, on peut déterminer la transformation (5) c'est-à-dire b et β en fonction de c_1 et c_2.

Ainsi la transformation (5), qui fait passer le point M_k de sa position à celle occupée avant par M_{k+1}, fait *glisser* la parabole sur elle-même (ce terme de *glissement* étant pris ici dans un sens plus général que celui strict relatif aux figures rigides).

On peut *resserrer* ou *raréfier*, à volonté, les points, régulièrement distribués, sur la parabole.

5. — D'une manière générale, la transformation linéaire

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 y_0 \\ y &= b + \beta_1 x_0 + \beta_2 y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

avec conservation de l'*aire*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 1$$

donne comme *trajectoires* (lignes qui *glissent* sur elles-mêmes) des *coniques*.

Si au lieu de la conservation de l'aire on avait imposé à la transformation (6) la conservation des angles *(similitude)* :

$$\alpha_1 = \beta_2 \,, \qquad \alpha_2 + \beta_1 = 0$$

on serait tombé, comme trajectoires, sur des *spirales logarithmiques*.

Ainsi: en partant des simples progressions élémentaires, interprétées géométriquement comme suites de points et passant aux suites de points définis par la transformation linéaire

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k \\ y_{k+1} &= b + \beta_1 x_k + \beta_2 y_k \end{aligned} \tag{7}$$

on peut obtenir les courbes élémentaires comme courbes-trajectoires *(lignes de courant)* du *groupe* défini par la transformation (7).

6. — Me plaçant systématiquement, à ce point de vue, j'ai donné, dans un cours fait, il y a quelques années à la Faculté des Sciences de Cluj, une exposition élémentaire de la théorie des courbes du second degré.

Bucarest, mai 1928.