

ESSAI HISTORIQUE SUR LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES

Autor(en): **Aubry, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21872>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ESSAI HISTORIQUE SUR LE PARALLÉLOGRAMME DES FORCES

PAR

A. AUBRY (Dijon).

1. — La seule science que nous puissions qualifier d'exacte est l'*arithmétique*; car elle est fondée sur le nombre, entité très claire parce qu'elle est une création abstraite de notre esprit. Avec la *géométrie*, laquelle y ajoute l'espace, la continuité et l'infini, on quitte la pure abstraction pour considérer des figures plus ou moins subjectives, et on voit apparaître des axiomes et des postulats indémontrables. Faisons intervenir un troisième concept, le *mouvement*, nous aurons la *cinématique*, qui réclame encore davantage de notions premières. Une dernière addition nous donne la *mécanique*, c'est l'idée de *force*, que nous connaissons seulement par ses effets: ici les hypothèses se rencontrent à chaque pas.

2. — La mécanique est une science physique à laquelle les procédés mathématiques ne peuvent s'appliquer directement. Tant qu'on peut vérifier expérimentalement les résultats de ces adaptations ou se cantonner dans des limites où elles sont reconnues applicables, on ne sort pas du domaine scientifique; mais on le quitte et on entre dans celui de l'hypothèse dès qu'on veut extrapoler ou étendre ces méthodes à d'autres cas, si on ne peut en vérifier l'opportunité. Aussi a-t-on abouti le plus souvent à une science tout artificielle: par exemple le *parallélogramme des forces*, qu'on a voulu de bien des manières, démontrer *a priori*, comme si c'était une vérité géométrique. Il est évident que c'est

une simple loi physique, qui ne peut se prouver que par expériences directes.

Pour Newton, c'est simplement une conséquence du principe de l'indépendance des effets des forces. Pour Varignon, le trajet d'un mobile mû uniformément sur une droite d'un plan subissant lui-même une translation, — est visiblement dirigé suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les deux trajets effectués dans le même temps: c'est là le *parallélogramme des mouvements* de la cinématique, qui se traduit par celui des forces, en supposant celles-ci proportionnelles à ceux-là.

Toutefois, à plusieurs points de vue, — ne serait-ce que comme exercice et pour familiariser avec les notions de la mécanique, — il est bon de faire voir comment l'analyse détaillée de cette loi jette de jour sur différents principes; si, de cette manière, on ne trouve pas une démonstration en règle, on voit, ce qui vaut beaucoup mieux, la manière d'être de cette loi.

D'ailleurs se contenter de dire sèchement que c'est là uniquement une loi d'expérience ne satisfait pas l'esprit, qui aime, à défaut du « pourquoi », connaître le « comment » des choses, jusqu'à leurs notions irréductibles.

3. — On détermine une force par son *point d'application*, sa *direction* avec le *sens* de celle-ci, et son *intensité*. On admet: que l'effet d'une force ne change pas si on la transporte en un point quelconque de sa direction, et que plusieurs forces appliquées au même point agissent indépendamment les unes des autres.

4. — ARISTOTE a une vague idée de la composition des mouvements; Archimède et d'autres géomètres construisent des courbes utilisant cette théorie; mais il faut arriver au XVII^e siècle pour la voir se préciser et se codifier.

STÉVIN, dans sa Statique publiée en flamand en 1586, en latin en 1608 et en français en 1634, arrive, d'une manière remarquable, aux conditions d'équilibre du plan incliné, en considérant une corde sans fin entourant un triangle ABC posé verticalement et sur laquelle sont enfilées régulièrement des boules pesantes ¹.

¹ La chose est plus claire, comme le remarque Lagrange, en remplaçant par une simple corde homogène.

Le système est en équilibre; autrement le mouvement perpétuel serait réalisé. Enlevons la partie pendante au-dessous de la base AC ¹, l'équilibre subsistera entre les poids des cordes AB , BC : or, ceux-ci sont comme les longueurs AB , BC .

Supposons vertical le côté BC ; on peut alors estimer l'effet du poids P (fig. 1) sur le plan incliné AB : le poids Q équilibrant P est à celui-ci comme AB à BC .

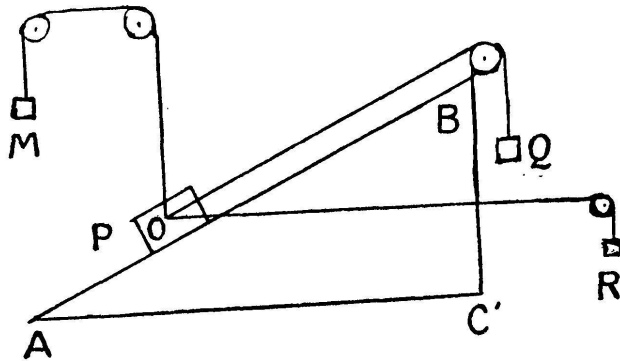


Fig. 1.

5. — Considérons le corps P (fig. 1) soumis à la force Q , que nous remplacerons par les deux poids M et R . D'après ce qui précède les trois forces M , Q , R sont respectivement proportionnelles et parallèles aux côtés BC , AB , AC du triangle.

Ainsi un point sollicité par trois forces dont deux sont à angle droit, est en équilibre si celles-ci sont proportionnelles et parallèles aux côtés d'un triangle, qu'on appelle *triangle des forces*. On a ainsi la démonstration du rectangle des forces.

STÉVIN étend sans démonstration ce théorème à trois forces concourantes faisant des angles quelconques. Il l'emploie à décomposer une force en deux autres de directions données, et en particulier à trouver l'équilibre du *funiculaire*, corde supportant des poids: c'est là la première idée de la *statique graphique*.

La démonstration générale a été donnée par Roberval en 1636, en s'aidant de la considération du levier et du plan incliné, ce qui rend sa démonstration trop longue et trop compliquée pour être reproduite ici.

¹ On a fait remarquer que rien ne dit que cette portion de corde est symétrique, Mais on pourrait objecter aussi que l'existence de la droite et du plan n'est pas prouvée. pas plus que l'homogénéité de l'espace, la non-influence de l'orientation, de la couleur, de la température, de la forme, de la personnalité et de la position de l'opérateur, etc. Où s'arrêterait-on dans l'énumération de ces difficultés.

6. — GALILÉE, NEWTON et VARIGNON ayant montré à envisager la force en général et non plus seulement la force-pesanteur, les démonstrations sont devenues plus abstraites; elles sont fondées sur ce qui suit :

Deux forces égales de même direction et de sens contraires se neutralisent; si deux forces *opposées* sont inégales, elles se retranchent et la *résultante* ou différence, est dirigée du côté de la plus forte *composante*.

On admet qu'il existe une certaine force unique de direction et d'intensité déterminées, équivalente comme effet à deux forces concourantes, située dans leur plan et dans leur angle aigu; car on ne voit rien qui pourrait la situer autrement. Si ces deux forces sont égales, leur résultante est, pour la même raison, dirigée suivant leur bissectrice.

7. — Daniel BERNOULLI (*Comm. Petr.* 1726) a cherché à rendre la théorie des forces concourantes indépendante du mouvement.

I. Si les trois forces P, Q, R appliquées à un même point sont en équilibre, il en est de même de kP , kQ , kR .

II. La résultante de deux forces rectangulaires AO, OB est égale à AB. Il ne donne pas de démonstration, mais il est aisé de la rétablir. Décomposons AO, OB en quatre forces OS, OD, OE, OT suivant la résultante OR et une perpendiculaire SOT à celle-ci; les systèmes OS, OA, OD et OE, OB, OT sont semblables au système OA, OR, OB: on a donc, à cause de I et en désignant par (a, b) la résultante des deux forces a et b :

$$\frac{(OA, OB)}{OA} = \frac{(OS, OD)}{OD} = \frac{OA}{OD}, \quad \frac{(OA, OB)}{OB} = \frac{(OE, OT)}{OE} = \frac{OB}{OE}.$$

D'autre part, OS et OT doivent se détruire, puisque la résultante

$$OR = (OA, OB) = (OS, OD, OE, OT)$$

est dirigée suivant OR. On a ainsi:

$$OR = (OD, OE) = OD + OE = \frac{OA^2}{OR} + \frac{OB^2}{OR} \quad \text{et} \quad OR = \sqrt{OA^2 + OB^2}.$$

Par exemple, la résultante de deux forces égales et rectangulaires est égale à $\sqrt{2}OA$.

III. Le cas du parallélogramme se ramène au précédent : c'est la seule démonstration qu'il donne explicitement.

Avec les forces OA, OB construisons le parallélogramme OACB et projetons O, B et C en O', B' et C' sur OA et BC. D'après le théorème de Stévin, OB peut se décomposer en OO' et OB', de sorte que les deux forces OA, OB peuvent se remplacer par OC' = OA + OB' et OO'.

IV. Etant donné deux forces AO, OB égales à P et dont la résultante R est égale à la bissectrice OR; décomposons R en deux forces égales Q, Q, bissectrices des angles AOR, ROB; l'intensité de Q est donnée par la formule

$$\frac{Q^2}{R} + \frac{P^2}{R} = R$$

sans démonstration. Peut se déduire de VI.

V. On peut ainsi établir les formules de l'intensité, dans les cas de deux forces égales faisant des angles de 90°, 45°, 22° 30', 11° 15', 7° 37' 30'', ... D'après II et IV¹.

VI. Soit OL la bissectrice des deux forces égales AO, OB et L le milieu de AB. Projetons les points A et B en S et T sur la perpendiculaire SOT à OL; on a :

$$OA = (OS, OL) \quad \text{et} \quad OB = (OT, OL) .$$

Conséquence de II.

VII. Soient quatre forces égales OA, OC, OD, OB symétriques par rapport à la droite OR. Il donne sans les démontrer les formules très compliquées des intensités de (OA, OB) et (OC, OD).
Conséquence de VI.

VIII. Combinant VI avec VII, on peut trouver la valeur de la résultante dans le cas d'un losange quelconque.

8. — FONCENEX (*Mém. de Turin*, 1760) donne une démonstration entièrement analytique.

I. La direction de la résultante est connue dans le cas de deux forces égales; il détermine son intensité par un calcul très long et obscurément expliqué, que Poisson a simplifié ainsi.

¹ D'Alembert, dans son exposition des théorèmes de D. Bernoulli (*opusc.* 1761), est parti du cas évident de trois forces égales faisant un angle de 120°.

2α étant l'angle des deux forces égales P, P , la résultante est donnée par une relation de la forme $R = P\varphi(\alpha)$ à déterminer.

Décomposons ces deux forces en quatre autres p, p, p, p faisant avec P et P des angles β : on aura $P = p\varphi(\beta)$. Les forces extérieures p se composant suivant la bissectrice commune en une force $p\varphi(\alpha + \beta)$, et les forces intérieures p suivant la même bissectrice, en une force $p\varphi(\alpha - \beta)$. On peut ainsi écrire:

$$R = 2p\varphi(\alpha + \beta) + 2p\varphi(\alpha - \beta) = 2p\varphi(\alpha)2\varphi(\beta)$$

On voit que la fonction $\varphi(\alpha)$ n'est autre chose que $2 \cos \alpha$.

II. Les forces rectangulaires P, Q , agissant sur le point O suivant les directions OA, OB ; soit OR leur résultante. Menons SOT telle que OA et OB soient les bissectrices de SOR et ROT . D'après I, on a, en appelant α l'angle SOA ,

$$P = 2 \cdot OS \cos \alpha, \quad Q = 2 \cdot OT \sin \alpha$$

d'où, comme OS et OT doivent se détruire,

$$OS = OT \text{ et } P \sin \alpha = Q \cos \alpha, \quad \text{ce qui donne la direction ;}$$

$$R = OS + OT = 2 \cdot OS, \quad \text{d'où } P = R \cos \alpha, \quad \text{ce qui donne l'intensité.}$$

III. L'angle AOB des deux forces P, Q étant quelconque, menons SOT perpendiculaire à la résultante OR et appelons α et β les angles AOR et ROB . On a:

$$OS = P \sin \alpha, \quad OT = Q \sin \beta, \quad OS = OT, \quad P \sin \alpha = Q \sin \beta, \quad \text{d'où la direction ;}$$

$$R = R' + R'' = P \cos \alpha + Q \cos \beta$$

éliminant Q ,

$$R \sin \beta = P \sin (\alpha + \beta), \quad \text{d'où l'intensité.}$$

9. La démonstration de Foncenex a été présentée très simplement par d'ALEMBERT (*Mém. de l'Ac. des Sc.*, 1769), en un seul théorème.

Soient quatre forces égales, symétriques et concourantes Oa', Oa, OA, OA' , (fig. 2) et deux autres forces égales $OC = Oc$ se recouvrant sur l'axe. Soient en outre $Of = OF = (P, Q)$. On a:

$$(Oa', Oa, Oc, OC, OA, OA') = (Oa', Of, OF, OA),$$

$$(Of, OF) = 2Q + (Oa, OA).$$

Désignant, comme plus haut, par $f \varphi(\alpha)$ la résultante de deux forces égales f , f formant un angle (2α) , il vient d'après ce qui précède,

$$2Q + P \varphi(\beta) \varphi(\delta) = P \varphi(\delta + \beta) + R \varphi(u), \quad R \varphi(u) = 2Q + P \varphi(\alpha);$$

substituant, il vient

$$\varphi(\beta) \varphi(\delta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\delta + \beta)$$

ce qui montre que

$$\varphi(\alpha) = 2 \cos \alpha.$$

On trouve ainsi:

$$\frac{\sin u}{P} = \frac{\sin(\alpha - u)}{Q};$$

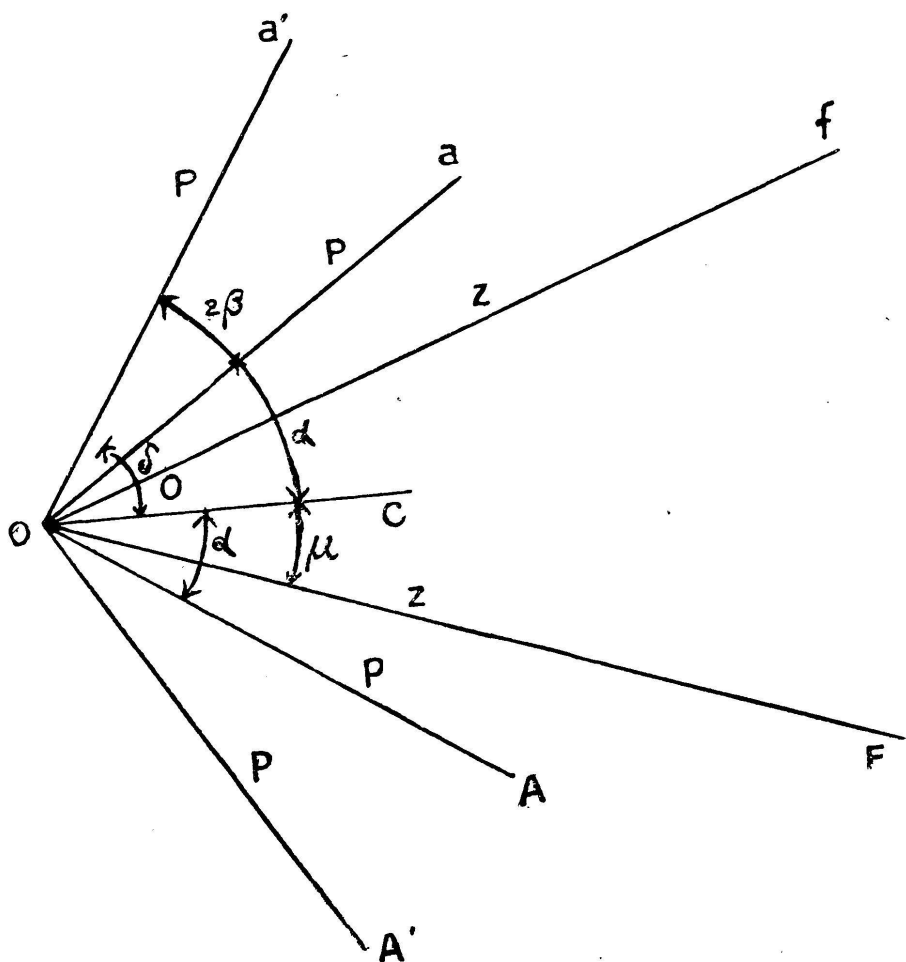


Fig. 2.

la résultante est donc dirigée suivant la diagonale du parallélogramme de Oa et Oc , et son intensité est

$$R = \frac{2Q + 2P \cos \alpha}{2 \cos u} = \frac{P \sin \alpha}{\sin u},$$

et par conséquent égale à cette même diagonale.

10. — Etant acquis le théorème de Stévin (§ 5), on passe ainsi au cas général, avec BOSSUT (*Méch.*, 1785). Considérons les forces OA, OB; achevons le parallélogramme OACB; menons SOT perpendiculaire à OC; projetons A et B en S, T, K et J sur OC et une perpendiculaire à OC. On a:

$$OA = (OS, OJ), \quad OB = (OK, OT)$$

d'où

$$(OA, OB) = (OS, OJ, OK, OT) = (OK, OJ) = OC.$$

11. — LAPLACE (*Méc. cél.*, 1799) a aussi donné une démonstration générale, dont je ne reproduirai que la partie fournissant la valeur de l'intensité.

Soient deux forces rectangulaires P, Q et R leur résultante faisant avec elles des angles α et $90^\circ - \alpha$. Posons

$$P = R\varphi(\alpha), \quad Q = R\varphi(90^\circ - \alpha)$$

et décomposons les forces P, Q en P', P'' et Q', Q'' sur la direction de la résultante et sur une perpendiculaire à cette dernière. Il viendra

$$P' = P\varphi(\alpha), \quad P'' = P\varphi(90^\circ - \alpha), \quad Q' = Q\varphi(90^\circ - \alpha), \quad Q'' = Q\varphi(\alpha);$$

les forces P, Q sont ainsi remplacées par les quatre forces

$$P' = \frac{P^2}{R}, \quad Q' = \frac{Q^2}{R}, \quad P'' = \frac{PQ}{R}, \quad Q'' = \frac{PQ}{R},$$

dont les deux dernières se détruisent et les deux premières s'ajoutent. De là, on tire

$$R^2 = P^2 + Q^2.$$

Maintenant deux forces quelconques OA, OA' peuvent être considérées comme les résultantes des forces AC, OC et A'C', OC', C et C' désignant les projections de A et A' sur une droite quelconque passant par O. Si sur OCC' on prend OD = OC + OC' et qu'on élève une perpendiculaire BD = AC + A'C', on aura:

$$\begin{aligned} (OA, OA') &= (AC, A'C', OC, OC') = [(AC, A'C'), (OC, OC')] \\ &= (OD, BD) = OB. \end{aligned}$$

12. — POINOT (*Statique*, 1803) faisant appel à la théorie du levier traite ainsi la question. Prenons sur BD (fig. 3), $DG = DC$, achevons le losange CG et appliquons en G et H les deux forces Q' et Q'' égales à Q .

(P, Q', Q, Q'') passe par D; car, d'un côté, comme $Q = Q'$, on a: $\frac{P}{Q'} = \frac{DG}{BD}$; (P, Q') passe donc par D, et d'autre part, puisque $Q = Q''$, (Q, Q'') est bissectrice de l'angle et passe par D, où on

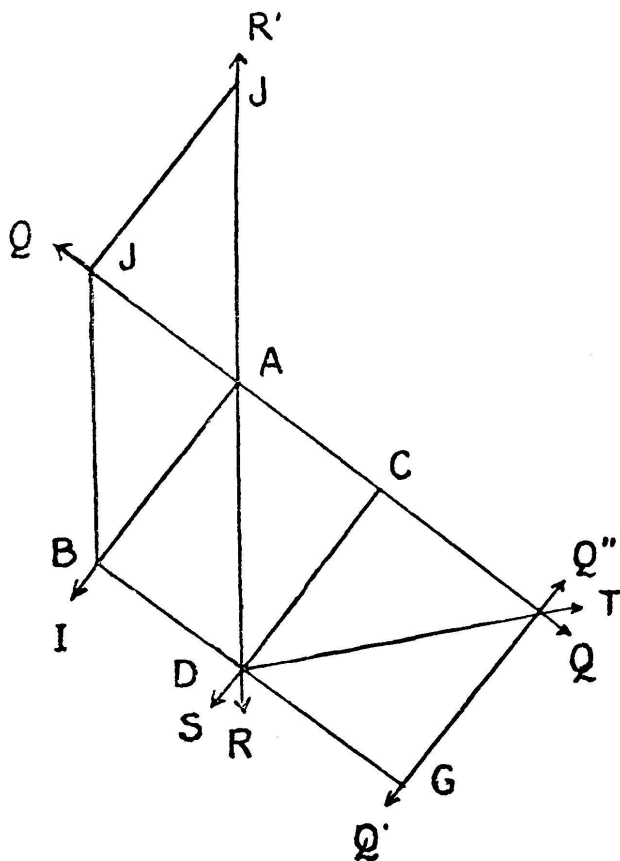


Fig. 3.

peut la supposer appliquée. Donc, enfin, (S, T) passe par D. Or $(S, T) = (P, Q', Q, Q'') = (P, Q)$. Donc cette dernière passe par D, c'est-à-dire qu'elle a sa direction sur la diagonale AD.

Il reste à faire voir que AD représente son intensité. Menons R' égale et opposée à R et achevons les parallélogrammes ID, JB; $AI = Q$ fait équilibre à AJ et $AB = P$, donc AJ fait équilibre à AB et AC.

13. — POISSON (*Méc.* 1833) montre, comme Foncenex, que la diagonale d'un losange représente bien, comme direction et

intensité, la résultante de deux forces appliquées sur deux côtés adjacents. Il étend ensuite le théorème à deux forces AO , OB faisant un angle droit. Menons SOT parallèle à AB et appelons K l'intersection de AB et de la résultante OC . Dans les losanges SK , KT , on a :

$$OA = (OS, OK) , \quad OB = (OT, OK)$$

d'où

$$(OA, OB) = (OS, OK, OT, OK) = (OK, OK) = 2 \cdot OK = OC ,$$

puisque les forces SO , OT se détruisent. Il achève ensuite comme Bossut (§ 11).

14. — Voici encore une démonstration géométrique très simple (AIMÉ, *J. de Liouville*, 1836).

Soient, dans un même plan, quatre forces concourantes égales

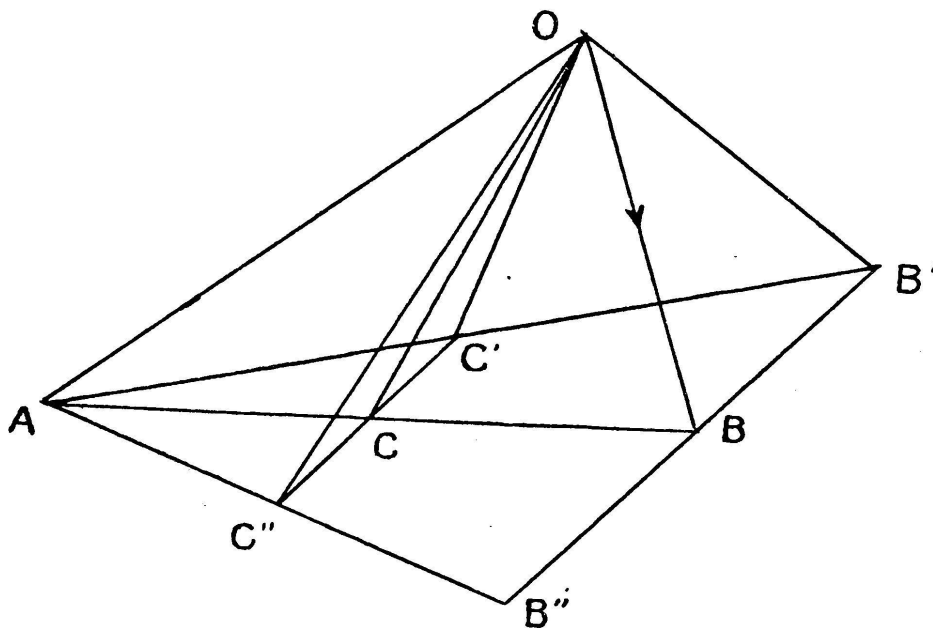


Fig. 4.

OA , OB , OB' , OA' disposées symétriquement par rapport à la droite OD ; E , E' , C , F , D , les milieux de AB , $A'B'AA'$, EE' , BB' . Les hypothèses

$$2 \cdot OC = (OA, OA') , \quad 2 \cdot OD = (OB, OB') , \quad 2 \cdot OE = (OA, OB) ,$$

$$2 \cdot OE' = (OA', OB')$$

entraînent celle-ci

$$2 \cdot OF = (OE, OE')$$

puisque $2 \cdot OF = OC + CD$ et que

$$(OA, OA', OB, OB') = (OE, OE') .$$

(Voir §§7, VII; 8, I; et 9.)

Maintenant, soient les deux forces OA, OB (fig. 4) et $OA > OB$. Perpendiculairement au plan AOB , menons la droite $B'B''$ ayant son milieu en B et telle que $OB' = OB'' = OA$; joignons O aux milieux C', C, C'' de AB', AB, AB'' . On a:

$$(2 \cdot OA, 2 \cdot OB) = (OA, OB', OA, OB'') = (2 \cdot OC', 2 \cdot OC'') = 4 \cdot OC$$

d'où

$$(OA, OB) = 2 \cdot OC .$$

15. — Depuis, on emploie cette démonstration de STURM (*Méc.*, 1868).

Un losange de quatre forces égales AB, AD, CB, CD , dirigées vers B et D , est en équilibre. En effet, si les résultantes $S = (AB, AD), T = (CB, CD)$ n'étaient pas égales, leur résultante $S - T$ serait dirigée, par exemple vers C ; en faisant tourner la figure de 180° , la résultante de S et de T serait tournée vers A ; ce qui est absurde. Ainsi les deux forces S et T se détruisent.

Juxtaposant m losanges semblables, on a un parallélogramme soumis uniquement aux forces totalisées de ses côtés, les forces intérieures se détruisant.

Juxtaposant n figures semblables à cette dernière, on aura un parallélogramme de $m \times n$ également en équilibre.

On termine comme Poinsot (§ 12).

16. — Dans les ouvrages techniques, on se borne à indiquer des vérifications expérimentales, soit, avec VARIGNON, par un limbe gradué sur le bord duquel peuvent être disposées trois poulies sur lesquelles glissent trois cordes tendues par des poids et réunies en un nœud commun: les trois poids et les trois angles étant convenablement choisis, le nœud se portera de lui-même au centre. Soit encore à l'aide de trois dynamomètres. Ou encore à l'aide d'une corde passant sur deux poulies, tirée par deux poids et en supportant un troisième, ou mieux un plateau pouvant recevoir des poids; soit enfin par un parallélogramme

ABCD articulé en A et B, le côté CD coulissant entre les côtés BC et AD.

Quant aux ouvrages de haute théorie, on conçoit qu'ils ne s'arrêtent pas aux détails de ces questions élémentaires et qu'ils se contentent, ou d'admettre la loi du parallélogramme comme un axiome qu'on vérifie expérimentalement *a posteriori*, ou par l'explication de Newton, ou par la théorie des vecteurs.

17. — La composition des forces parallèles se déduit facilement de ce qui précède. Cette théorie remonte à Varignon. Deux forces AEO, BFO étant appliquées aux points E, F d'un corps matériel, et OC étant leur résultante, menons SOT quelconque. OA se décompose sur cette droite et sur la résultante OC suivant OS et OJ; OB suivant OT et OK: SA et TB sont des forces parallèles et équivalentes à OC.

On voit que c'est Varignon qui a montré le premier l'usage de forces auxiliaires OS, OT égales et opposées (Voir §§ 7 II, VI, VII; 8 II, III; 10; 11; 13).

C'est Poinsoot qui a mis cette théorie sous la forme qu'on lui donne aujourd'hui.

18. — La théorie du levier a précédé celle de la composition des forces concourantes, car cet outil universel a été connu et apprécié bien avant qu'on s'avisât de faire une science de la mécanique.

ARISTOTE, le premier, en parle comme expliquant tous les autres mécanismes; il en donne la loi avec un remarquable essai de

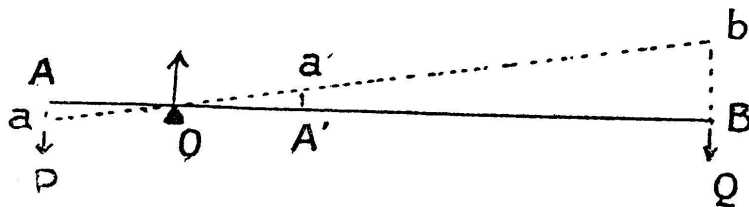


Fig. 5.

démonstration: un levier AOB (fig. 5) tournant ¹ autour du point O, les extrémités montent ou descendent ², comme les *bras de*

¹ Descartes, le premier, a remarqué qu'il faut considérer seulement la tendance du mouvement, c'est-à-dire dans sa phase initiale. Il faudrait ajouter ici le mot « très peu ».

² *Id.*, le mot « sensiblement ».

levier AO, OB. De là, la loi en question, si on admet la proportionnalité des déplacements aux intensités des forces. On voit là l'idée des *mouvements virtuels* et de la théorie des *moments*.

JORDANUS (XIII^e siècle) a rendu, de la manière que voici, cette démonstration plus satisfaisante: soit OB le bras le plus long; prenons $OA' = OA$. Si les poids ne donnent pas l'équilibre, A montera ou descendra, tandis que B descendra ou montera, en même temps que A': les deux points A, A' à égales distances de O étant chargés de poids égaux resteront en équilibre. Or, en général, les efforts nécessaires pour monter un poids à différentes hauteurs sont proportionnels à celles-ci¹ et par suite celui qui serait nécessaire pour monter B en b devrait monter A' en a' , ce qui est impossible, les bras OA, OA' étant égaux, ainsi que les poids P, P'

19. — ARISTOTE est un philosophe, aussi il envisage la question d'un point de vue très général. La conception d'Archimède, mathématicien et ingénieur, est plus rigoureuse, plus pratique, mais plus localisée. Il substitue à la considération du mouvement, celle de l'équilibre, qu'il a fondée; sa démonstration revient à ceci.

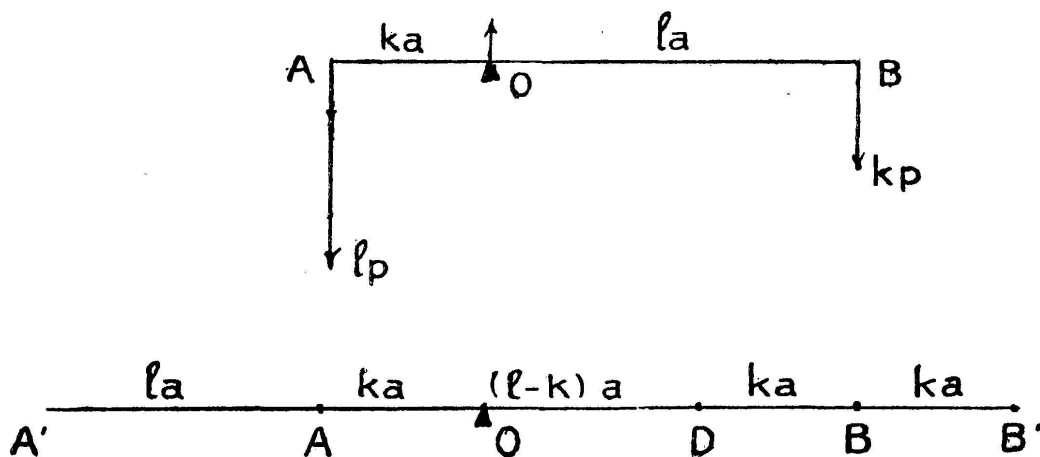


Fig. 6.

Il y a équilibre si deux poids lp , kp sont attachés aux deux extrémités d'un levier dont les bras sont $OA = ka$, $OB = la$ (fig. 6). En effet, divisons les deux poids en parties égales à p ,

¹ Descartes a retrouvé ce principe de Jordanus et en a fait le fondement de sa mécanique.

ajoutons les longueurs $AA' = OB$ et $BB' = OA$; divisons $A'B'$ en $k + l$ parties égales à a ; enfin mettons $k + l$ poids p aux $k + l$ divisions. L'équilibre ne sera pas rompu; les c.g. des parties $A'D$ et DB' étant en A et B , les milieux de $A'O$ et de $O'B$ sont les c.g. des poids placés entre A' et O d'une part, entre O et B' d'autre part: le c.g. du tout est au milieu O de AB , de même que celui de P et Q .

Par sa méthode d'exhaustion, Archimède étend ensuite son théorème au cas de k et l incommensurables.

20. — STÉVIN a simplifié cette ingénieuse démonstration par la substitution aux poids élémentaires, d'un cylindre $A'B'$ suspendu en A et B et qu'il coupe, en D . On a objecté que rien ne prouve que l'équilibre ne serait pas troublé ainsi. D'ailleurs Cardan avait déjà eu une idée semblable, et même du temps d'Archimède, cette idée s'était fait jour; ainsi Duhem (*Or. de la Statique*, 1905) a trouvé dans un manuscrit du XIII^e siècle, cette élégante démonstration, qu'il croit grecque.

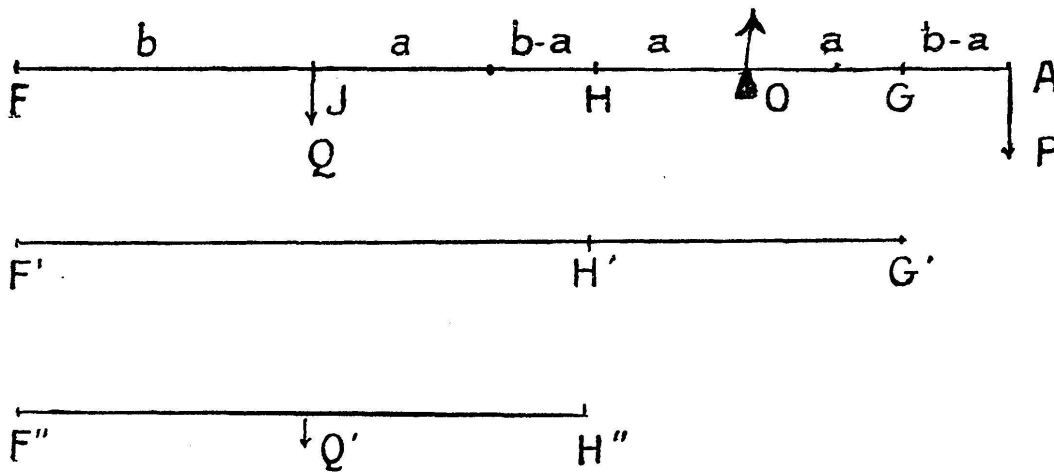


Fig. 7.

Le poids P équilibrant le cylindre $E'G'$ (fig. 7), retranchons de celui-ci une partie $HG = 2 \cdot OG$ et suspendons-la par son milieu J sur le prolongement du levier. L'équilibre subsistera encore, car si Q est le poids de $E'H'$ ou $E''H''$, on a:

$$\frac{P}{Q} = \frac{EG}{EH} = \frac{2b + 2a}{2b} = \frac{b + a}{b} = \frac{OJ}{OA}.$$

21. — La démonstration, elle-même a été l'objet de plusieurs critiques. Elle s'appuie sur les propriétés du c.g. et on s'en sert pour établir ces mêmes propriétés, d'où pétition de principe. Mais les écrits d'Archimède sur le c.g. ne sont pas connus.

En outre l'axiome suivant n'a pas été reconnu assez évident : un levier à bras égaux étant chargé de poids égaux, la charge du point d'appui est double de chacun des deux poids.

22. — HUYGENS a tenté de démontrer cet axiome. Soient a , b , c les milieux des côtés du triangle ABC; appliquons en A, B, C des poids $2P$, P , P ; le système est en équilibre par rapport à la droite ab , à cause des leviers AB, AC. Or, on peut aussi envisager le système comme formé des leviers BC et Aa , chargés des poids P , P , $2P$ et x , ce qui indique que $x = 2P$. La première figuration ne laisse rien à désirer, mais la seconde pêche en ce qu'elle désolidarise le système.

D'Alembert (*l. cit.*) considère les quatre forces verticales égales P , Q , Q , P appliquées symétriquement au levier AOB, qui est en équilibre; car soit R la résultante: en la remplaçant par les deux forces égales et symétriques S , S , qui équivaudraient à P , P , Q , Q et ajoutant les forces Q' , Q' égales et opposées à Q , Q , il resterait les seules forces P , P qui seraient en équilibre bien que de même sens, ce qui serait absurde. Ainsi $R = 0$ et si on réunit

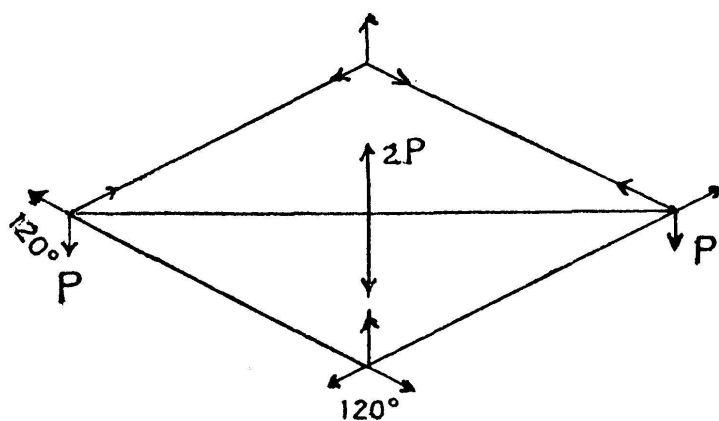


Fig. 8.

Q et Q en O^1 , on a $R = 2P$. Lagrange ne trouve pas cette démonstration convainquante et lui préfère la suivante, donnée par Fourier en 1799, dans le *J. de l'Ec. Pol.*

¹ S'il est licite de concentrer Q et Q au point d'appui, il n'était besoin que de considérer P , P et les concentrer en O .

Un losange ayant ses angles de 120° et 60° est soumis à douze forces égales distribuées comme l'indique la fig. 8. Ajoutons à la grande diagonale deux forces doubles des premières: toutes ces forces se détruisent sauf P , P et $2P$.

23. — La loi du levier a été démontrée de plusieurs autres manières, dont les suivantes:

NEWTON (*Phil. nat. princ.*, 1687) y arrive en partant du *levier angulaire*. Soit (fig. 9), le levier AOB où $OB > OA$. De O, menons

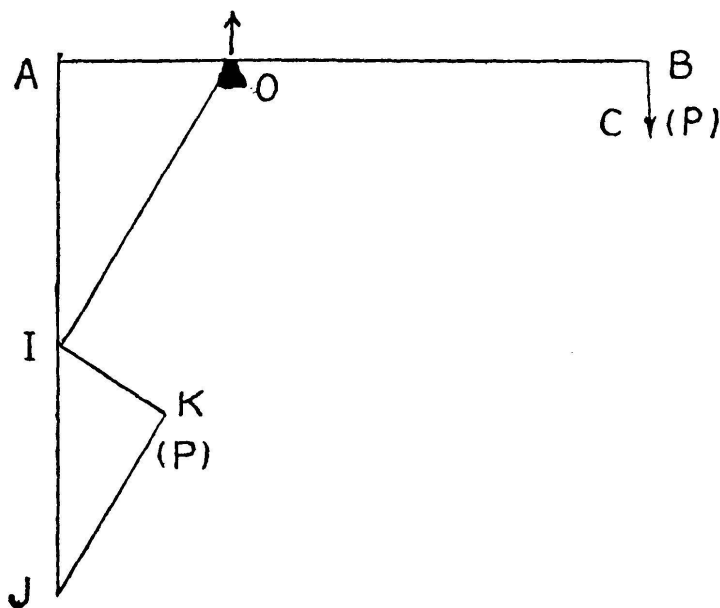


Fig. 9.

une oblique OI coupant la verticale AJ de manière que $OI = OB$; appliquons, perpendiculairement à OI, la force $IK = BC$; enfin menons KJ parallèle à OI. Le levier angulaire IOB est en équilibre, ayant ses bras égaux et étant soumis à deux forces égales. Or, on a:

$$\frac{IK}{IJ} = \frac{AO}{IO}, \quad \text{d'où} \quad BC \cdot OB = IJ \cdot AO.$$

Donc, si on accroche en A un poids égal à IJ, il y aura équilibre.

On a su depuis (Duhem, *op. cit.*) que cette démonstration a été entrevue par Jordanus et L. de Vinci.

HUYGENS considère deux barres parallèles AA' , BB' (fig. 10), dont les milieux sont réunis par une tige MN, divisée en O en raison inverse de AA' et BB' . Chargeons ces deux dernières de

poids égaux uniformément distribués; par O , mesurons ab à 45° sur MN , et sur cette droite, projetons tous les poids de AA' et de BB' . Supposons $AA' > BB'$; le c.g. des poids MA et BB' est sur ab , ainsi que ceux des poids ML et LA , car deux poids également éloignés de AB' ou de L sont égaux. Le c.g. de tous ces poids est donc sur ab et sur MN : il est donc en O , intersection de ces deux droites.

On simplifie cette démonstration en remplaçant les poids discontinus par des prismes, comme Stévin l'a fait pour celle d'Archimède (§ 20). Mais elle présente cette difficulté relevée par Mach (*La Méc.*, 1904) que l'équilibre pour deux axes du plan n'entraîne pas nécessairement celui de toute autre droite passant par leur intersection.

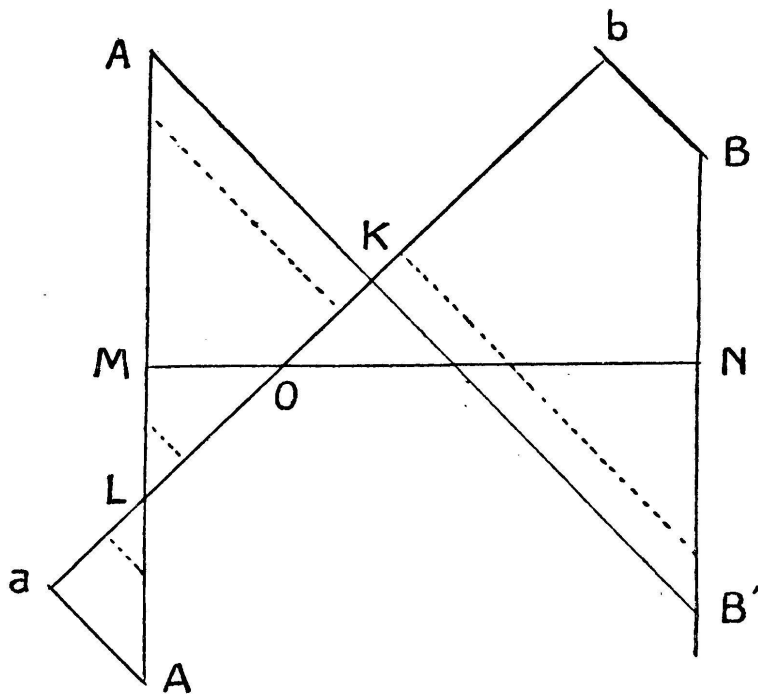


Fig. 10.

Voici le schéma de celle de Lahire (*Méc.*, 1695), que je ne vois citée nulle part. Désignons par le symbole $(a, P; b, Q)$, un levier dont les bras, de longueurs a et b supportent des poids P et Q . Supposons que le levier $[(k - 1) a, p; a, (k - 1) p]$ soit en équilibre et mettons-le à la place de l'un des poids kp du levier fixe $(a, kp; a, kp)$; il y aura encore équilibre, même si on fait tourner le premier levier autour de son point d'appui, et même si le bras a arrive à recouvrir le bras a du levier fixe et se solidarise

avec lui. Alors le système se réduit au levier $(a, kp; ka, p)$. Donc si le levier $(a, hp; ha, p)$ est en équilibre, pour $h = k - 1$, il l'est pour $h = k$, et comme il l'est pour $h = 1$, il l'est en général.

Faisons la même opération avec le levier mobile $[(l - 1) a, kp; a, k(l - 1) p]$ et le levier fixe $(ka, lp; a, klp)$, qui sont tous deux en équilibre, d'après ce qui précède; il viendra le levier $(ka, lp; la, kp)$ de la fig. 6.

24. — LAHIRE s'appuie sur l'axiome d'Archimède (§ 21); Lagrange emploie un procédé de solidarisation semblable, pour en déduire ce lemme qu'Archimède démontre en se servant de la théorie du c.g. (§ 19): un poids $2P$ attaché à l'extrémité d'un levier fait le même effet que deux poids P, P placés symétriquement sur le levier et son prolongement.

25. — D'ALEMBERT a tenté de prouver ce même lemme à l'aide du procédé des *équations fonctionnelles* inauguré par Foncenex (§ 8, I). Désignant par $P \varphi(a)$ l'effet que produit un poids P à l'extrémité d'un bras de longueur a , on a d'après l'énoncé,

$$P \varphi(a + x) + P \varphi(a - x) = 2P \varphi(a)$$

d'où successivement

$$\begin{aligned} \varphi'(a + x) dx - \varphi'(a - x) dx &= 0, & \varphi'(2x) &= \varphi'(0) = \text{const.} = 2C, \\ \varphi(2x) &= 2Cx + C', & P \varphi(a) &= Pa, \end{aligned}$$

puisque $P \varphi(0) = P$.