II.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **09.08.2024**

Seulement dans ce cas spécial il est clair que le mot « infini » serait pris dans son sens étymologique ou primitif.

Ainsi, suivant que l'« infiniment petit » est considéré pendant la période où il passe par la série de ses valeurs décroissantes, ou bien au moment où il atteint la valeur zéro, le mot « infini » est pris dans son sens dérivé ou dans son sens étymologique.

Voilà donc encore une complication et, une raison de plus pour remplacer l'expression « infiniment petit » par une autre plus juste.

En recourant, par exemple, aux expressions de Pascal, le libellé deviendrait le suivant.

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « très grand de côtés très petits... »

Ou bien en adoptant la proposition de l'Abbé Moreux, il se présenterait comme suit:

« En regardant une courbe comme un polygone d'un nombre « infini de côtés indéfiniment petits... »

Ou d'autres façons encore, pourvu que le mot « infini » y soit remplacé par un autre choisi d'un commun accord entre savants.

## II.

Dans les années qui suivirent la publication des travaux de Leibniz relatifs à l'Analyse infinitésimale, le nouveau calcul suscita de nombreuses controverses parmi les mathématiciens, qui se partagèrent en deux camps.

Il s'agissait de déterminer la véritable nature des infiniment petits. Suivant les uns ces quantités, tout en pouvant devenir aussi petites qu'on le veut, devaient toujours être différentes de zéro; suivant les autres, au contraire, elles devaient être toujours égales à zéro.

Nous ne pouvons mieux faire que de citer Euler, qui dans la préface et le chapitre 3 de son ouvrage *Institutiones Calculis Differentialis*, 1755, expose avec une grande clarté les deux points de vue.

Premier point de vue:

« La plupart de ceux qui enseignent les lois du Calcul intégral

« distinguent les différentielles du zéro absolu et établissent une « espèce particulière de quantités infiniment petites qui ne « s'évanouissent pas entièrement, mais gardent une certaine « quantité qui serait plus petite que toute quantité assignable. »

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Deuxième point de vue:

« La doctrine de l'infini sera mieux illustrée si nous exposons « ce qu'est l'infiniment petit des mathématiciens. Il n'y a pas « de doute que toute quantité peut diminuer jusqu'à s'évanouir « entièrement et rentrer dans le néant. Mais une quantité infi- « niment petite n'est autre chose qu'une quantité évanouissante, « c'est pourquoi elle sera véritablement $= 0$. On formule aussi « une définition des infiniment petits, lorsqu'on dit qu'ils sont « plus petits que toute quantité assignable; si, en effet, une « quantité est si petite, qu'elle est plus petite que toute quantité « assignable, *elle ne peut pas ne pas être nulle*, car si elle n'était « pas égale à zéro on pourrait déterminer une quantité qui lui « serait égale, ce qui est contraire à l'hypothèse. »

On voit que Euler était partisan convaincu du deuxième point de vue.

Lazare Carnot, dans le but qu'il se propose de rapprocher ces points de vue, d'en montrer les rapports et d'en proposer de nouveaux, étudia la question de très près. Bien que ne cachant pas une certaine préférence pour le premier (en quoi il se rencontre avec l'illustre mathématicien Lagrange) il reconnaît cependant que l'on peut tout aussi légitimement considérer les infiniment petits comme égaux à zéro que comme différents de zéro.

Voici ce qu'il en dit à diverses reprises dans l'ouvrage déjà cité:

« Il semble néanmoins que les quantités infiniment petites « étant des variables, *rien n'empêche qu'on ne puisse leur attribuer « la valeur zéro aussi bien que toute autre.* »

« On est donc entièrement maître, en soumettant au calcul les « quantités que nous avons nommées infinitésimales, de regarder « ces quantités comme *effectives* ou comme *absolument* nulles... » « ...« Il suit de ce que nous venons de dire qu'on peut à volonté « considérer les quantités infiniment petites comme *absolument « nulles*, ou comme de véritables quantités. »

Les auteurs contemporains: Duhamel, Camille Jordan, Cournot, Serret, Sonnet, donnent la définition des infiniment petis accompagnés de commentaires, mais sans aborder généralement ce point particulier, estimant, peut-être que la question ayant été réglée par Carnot, il n'y a pas lie ud'y revenir.

Ainsi on peut citer Boussinesq (*Cours d'Analyse infinitésimale*, 1887) qui admet implicitement que l'« infiniment petit » peut aussi bien avoir la valeur zéro que des valeurs finies, comme le prouve le passage suivant, déjà cité:

« L'infiniment petit *considéré dans sa valeur zéro* non dans « l'infinité des *degrés décroissants que parcourt pour l'atteindre la* « *quantité continue indéfiniment divisible*, *n'est pas infini*, *mais* « *nul.* »

Un cependant, J. Houël, émet une restriction un peu imprécise dans deux passages de l'ouvrage déjà cité.

« La limite d'une variable est une quantité constante dont la « variable diffère d'une quantité infiniment petite, *sans que cette* « *différence puisse en général s'annuler.* »

« Un infiniment petit *n'est pas généralement nul et*, *ce n'est* « *qu'exceptionnellement* qu'il peut passer par la *valeur zéro.* »

L'opinion de l'Abbé Moreux, exprimée dans le récent ouvrage, déjà cité, attire particulièrement l'attention. Le savant Abbé prend nettement position pour le premier point de vue dans les termes suivants:

« L'infiniment petit *n'est pas davantage une quantité nulle*, « *elle est bien en fait différente de zéro*, mais elle peut s'en rap- « procher autant qu'on le désire... »

« ...C'est pour cette raison que les géomètres disent de « l'infiniment petit que c'est une quantité évanouissante; « *celle-ci ne disparaît jamais*, mais elle devient si infime qu'elle « échappe à toute fixation précise... »

« ...Voilà la vraie notion de l'infiniment petit, et ce qui nous « donne une véritable idée de la propriété essentielle de l'in- « finiment petit que nous utiliserons en mathématiques, celle « de pouvoir devenir moindre que toute quantité définie, si « petite soit-elle, c'est-à-dire de tendre vers zéro, *sans cependant* « *arriver à être nulle.* »

Supposons qu'un débutant, au lieu de se contenter, comme c'est le cas le plus général, d'étudier uniquement le cours de son professeur, ou l'ouvrage de son choix, ait le goût et le loisir de faire de la bibliographie; on peut penser que la comparaison de ces divers textes et la constatation de leurs divergences lui causeront un peu de surprise et de découragement.

Il pourrait même arriver qu'il perdît un peu de sa confiance dans les théories mathématiques, ce qui serait un résultat fâcheux, car nous pensons que cette question particulière constitue un fait unique, ou presque, dans les sciences exactes.

En général l'existence de toutes les questions de mathématiques: faits, lois, théorèmes, notions, quelque soit le nom qu'on leur donne, ne peut donner matière à discussion. Ainsi, par exemple, en est-il du fait que la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, bien qu'elle se présente sous la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, a dans chaque cas particulier une valeur bien définie, qui est elle-même une fonction de la même variable indépendante que la fonction $y$.

Cette loi mathématique intéressante, curieuse, est hors de toute contestation.

La notion de l'infini, ce mot étant pris dans son sens étymologique, elle aussi, est indiscutable.

Le cas des quantités dites « infiniment petites » est bien différent. Dire qu'on va employer des quantités variables, que cette propriété de variabilité s'exercera dans le sens de la décroissance, que cette décroissance pourra être poussée aussi loin qu'il le faudra pour que les quantités puissent devenir plus petites que toute quantité donnée, n'est pas découvrir une loi mathématique, pas plus qu'une notion s'imposant à l'esprit. Nous ne voyons là rien autre chose qu'établir une convention, que forger de toutes pièces une définition. Il pouvait donc arriver, et il est arrivé en effet, que les savants, préoccupés de rigueur mathématique, ont voulu compléter la définition. Mais s'ingéniant, chacun suivant la nature de son esprit, à donner à cette définition une précision qu'elle ne comporte peut-être pas, ils ont été trop loin et, ont abouti à ces divergences qui dureront probablement toujours. Autrement dit, il est possible que pour avoir voulu trop bien faire, on n'ait réussi qu'à compliquer et à embrouiller la question.

C'est pourquoi, nous plaçant au seul point de vue de l'intérêt des étudiants, nous pensons que l'enseignement, imitant en cela ce qu'il fait par nécessité pour la philosophie, ainsi que pour les sciences physiques et naturelles, devrait les mettre franchement au courant des incertitudes de la question, et des divergences de vues des grands mathématiciens, en leur faisant un court historique de l'invention du Calcul Infinitésimal.

Nous pensons qu'il ne serait pas inutile de réserver une place dans cet historique pour quelques indications sur les recherches de Lagrange exposées dans le grand ouvrage qu'il publia sous le titre de Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Les inconvénients signalés plus haut étant ainsi évités, le professeur pourrait faire connaître sa manière de voir à ses élèves; mais ceux-ci seraient libres de l'adopter de confiance, ou bien de creuser la question, pour se faire une opinion personnelle.

Quelques mots encore au sujet des différentielles, auxquelles s'applique naturellement ce que nous avons dit en dernier lieu des infiniment petits. Il se pourrait que, là aussi, on ait créé une complication inutile, en distinguant les différentielles des différences; désignées respectivement par les lettres $d$ et $\Delta$, car on introduit ainsi dans les esprits cette idée, ou tout au moins cette impression que, les unes et les *autres sont de natures essentiellement dissemblables.*

Sans insister autrement, nous ferons seulement remarquer que, avant nous, J. Houël a eu la même pensée, qu'il a mise en pratique dans son ouvrage déjà cité, après en avoir, dans la préface présenté la justification qui se termine ainsi.

« Il m'a donc semblé superflu de désigner ces quantités tour à « tour par deux caractéristiques différentes $\Delta$ et $d$, cette double « notation ne pouvant avoir pour effet que d'obscurcir dans « l'esprit des commençants la vraie notion de l'infiniment petit »