Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION NOUVELLE DE LA FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE RELATIVE A L'ADDITION DES ARCS

Autor: Pelosi, Dr ès sc. Louise

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21875

DÉMONSTRATION NOUVELLE DE LA FORMULE TRIGONOMÉTRIQUE RELATIVE A L'ADDITION DES ARCS

PAR

Louise PELOSI, Dr ès sc. (Turin).

On connaît plusieurs démonstrations de la formule fondamentale.

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \ ; \qquad (1)$$

ces démonstrations sont fondées sur l'emploi de triangles semblables, ou sur le théorème de Ptolémée relatif au quadrilatère inscrit, ou sur le théorème des projections, ou sur des considérations analogues (voir, par exemple, les *Exercices de Trigonométrie*, par F. G. M., page 8, Paris, a. 1915).

On doit aussi à M. BURALI-FORTI une démonstration très simple de la formule (1), à l'aide de la théorie des vecteurs (voir: Burali-Forti e Marcolongo: *Corso di Matematica*, vol. II, *Geometria*, page 56, Napoli, a. 1923).

Dans cette Note je vais donner une démonstration nouvelle et tout à fait élémentaire de la formule (1) par des considérations très simples sur l'équivalence des triangles.

Désignons par a et b deux angles aigus, que nous représentons sur le cercle trigonométrique par les arcs AB et BC; menons AP et CQ perpendiculaires au rayon OB, et CN perpendiculaire au diamètre AA'. Nous aurons:

$$AP = \sin a \ , \qquad OP = \cos a \ ,$$

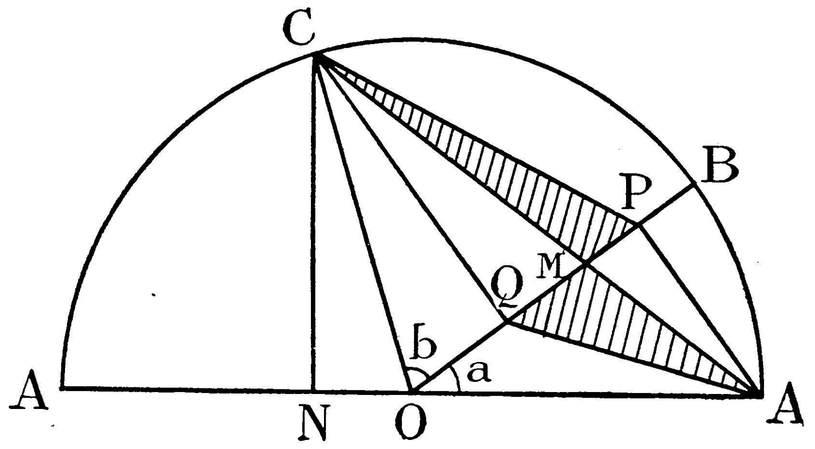
$$QC = \sin b \ , \qquad OQ = \cos b \ ,$$

$$NC = \sin(a+b) \ .$$

Joignons A aux points Q et C, et remarquons que, le rayon OA étant égal à l'unité, la valeur de NC est égale au double de l'aire du triangle AOC, de sorte que nous pouvons écrire:

$$\sin (a + b) = \mathrm{NC} = 2 \cdot \mathrm{AOC} = 2 \cdot \mathrm{AOM} + 2 \cdot \mathrm{MOC} . \quad (2)$$

D'autre part les triangles AQC, PQC sont équivalents car ils ont la même base QC et ont les sommets A et P sur une parallèle à la base; si l'on soustrait de chacun de ces deux triangles, le



triangle MQC on conclut que les triangles AQM et PMC sont équivalents, par conséquent le triangle AOC est équivalent à la somme des triangles AOQ et PQC; de là, on déduit:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \mathrm{AOC} &= 2 \cdot \mathrm{AOQ} + 2 \cdot \mathrm{POC} = \mathrm{OQ} \cdot \mathrm{AP} + \mathrm{OP} \cdot \mathrm{QC} \\ &= \cos b \cdot \sin a + \cos a \cdot \sin b . \end{aligned}$$

En portant dans la relation (2) on obtient la formule (1).

Par des considérations analogues à celles que nous venons de développer on trouverait que la formule (1) subsiste pour des valeurs quelconques de a et de b.

Remarque. — Si $a = b$, les points Q, M, P coïncident et l'aire du triangle AOC devient égale à $\sin a \cos a$; on en conclut immédiatement la formule :

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a .$$

Lycée de Bielle (Turin). — Février 1928.