

BIBLIOGRAPHIE

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

BIBLIOGRAPHIE

Emile PICARD. — **Selecta.** — Un beau volume in-4° de VIII-304 pages avec un portrait de M. E. Picard. Prix: 60 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Ce volume est celui dont nous avons déjà parlé en tête du présent fascicule, volume offert à M. Emile Picard par ses amis, ses collègues, ses élèves, bref par tous ses admirateurs, et qui contient les plus jolis, les plus savants Mémoires publiés par l'illustre mathématicien.

Le Jubilé, le cinquantenaire scientifique de ce dernier ne pouvait être mieux souligné que par cette réunion de travaux qui porte, en frontispice, deux dates: 1877-1927.

Indiquons seulement les titres des admirables publications ainsi réunies, avec quelques mots d'explication pour chacune, mots d'ailleurs d'une utilité douteuse pour des pages aussi célèbres.

Mémoire sur les Fonctions entières (Ann. Ec. Norm., 1880). Ce mémoire est précisément celui dont parle M. Painlevé dans le discours reproduit plus haut; il contient « les deux théorèmes révélateurs, tels deux caps d'un continent inconnu ».

Démonstration d'un Théorème général sur les Fonctions uniformes liées par une relation algébrique. (Acta mathematica, 1887). L'esprit est analogue à celui du Mémoire précédent mais, au lieu d'utiliser des transcendentes étudiées par Charles Hermite, il faut recourir à de certaines fonctions fuchsienues construites par Henri Poincaré.

Sur les couples de Fonctions uniformes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (Rendiconti di Palermo, 1912). Mêmes considérations mais déjà très modernisées avec Landau, Lindelöf, Carathéodory, Montel,...

Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions (Acta mathematica, 1882). Extension au cas de deux variables, de la propriété essentielle de la fonction modulaire.

Sur les fonctions hyperfuchsienues provenant des séries hypergéométriques de deux variables (Ann. Ec. Norm., 1885). Equations aux dérivées partielles formant un système dont trois solutions en x, y livrent des quotients z et t tels que x, y soient fonctions uniformes de z et t . Généralisation d'une fonction fuchsienne. Relation avec les séries hypergéométriques de deux variables de M. P. Appell.

Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées (Comptes rendus, 1883). Extension, aux formes à indéterminées conjuguées, des méthodes données par Ch. Hermite pour les formes quadratiques.

Sur la réduction continue de certaines formes quadratiques (Comptes rendus, 1883). Poursuite du sujet par d'élégants procédés géométriques. Réduction pour variable z enfermée dans un polygone à côtés circulaires orthogonaux à un même cercle.

Sur les formes quadratiques quaternaires et sur les groupes hyperabéliens correspondants (Comptes rendus, 1884). Correspondance par isomorphisme donnant une origine des plus élégantes aux groupes indiqués.

Sur un groupe de transformations des points de l'espace situés du même côté d'un plan (Bull. Soc. math., 1883). Il s'agit encore du remplacement d'une forme quadratique ordinaire par une forme à indéterminées conjuguées. Au triangle fondamental de la substitution modulaire correspond ici un polyèdre fondamental.

Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé (Journal Ec. Polyt., 1890). Grandes extensions du Problème de Dirichlet. Emplois déjà très généraux de méthodes d'approximations successives. Fonctions de Green généralisées. Conditions pour que les intégrales soient analytiques.

Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du Problème de Dirichlet (Acta mathematica, 1901). Equation aux dérivées partielles $r + t = ap + bq + cz$. Cas où a, b, c sont analytiques. Problèmes d'analyticité et de continuité. Nouveaux et larges emplois de la méthode d'approximations successives.

De l'intégration de l'équation $\Delta u = e^u$ sur une surface de Riemann fermée (Crelle, 1905). Théorèmes d'unicité par singularités imposées. Procédé alterné de Schwartz employé dans des cas tout à fait nouveaux.

Sur les groupes de transformations des équations différentielles linéaires (Comptes rendus, 1894). Extensions, aux équations différentielles linéaires, des résultats donnés par Evariste Galois pour les équations algébriques.

Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles (Comptes rendus, 1895). Recherche de ce qui, dans les idées précédentes, pourrait être étendu aux équations différentielles non linéaires.

Sur les intégrales de différentielles totales de troisième espèce dans la Théorie des Surfaces algébriques (Ann. Ec. Norm., 1901). Introduction du nombre ρ des courbes algébriques qui, sur une surface algébrique, ne peuvent être les seules courbes logarithmiques d'une intégrale de différentielle totale de troisième espèce.

Sur la formule générale donnant le nombre des intégrales doubles de seconde espèce dans la Théorie des Surfaces algébriques (Comptes rendus, 1904). Nombre ρ_0 lié linéairement au ρ précédent et au genre d'une section plane de la surface.

Sur quelques questions se rattachant à la connexion linéaire dans la Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Crelle, 1905). Equation différentielle linéaire E aux périodes d'une intégrale abélienne de seconde espèce attachée à la surface; ses solutions polynomiales en y et les intégrales de différentielles totales de seconde espèce.

Sur la nature algébrico-logarithmique des intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières (Ann. Ec. Norm., 1916). Nouvelles précisions quant à l'introduction du nombre ρ .

Sur un théorème général relatif aux Equations intégrales de première espèce et sur quelques Problèmes de Physique mathématique (Rendiconti di Palermo, 1910). Conditions d'existence pour les solutions des équations indiquées.

Emploi des séries trigonométriques et de leurs généralisations. Systèmes différentiels linéaires et approximations successives. Hypothèses de sommabilité quant aux données et aux solutions. Armille à chaleur spécifique variable. Problème de Dirichlet plan.

Sur la distribution de l'Electricité avec la loi de Neumann et sur la Théorie analytique de la Chaleur dans le cas d'un saut brusque de température (Rendiconti di Palermo, 1914). La loi de Neumann étant plus générale que celle de Coulomb, on a ici un théorème de Poisson généralisé puis des équations intégrales également plus générales que celles liées à l'ordinaire théorie du potentiel. Pour le problème thermique, association de deux équations.

Sur la rotation d'un système déformable (Bull. Soc. math., 1894). Problème du chat envisagé par Marey, P. Appell, Guyou, Marcel Deprez, Maurice Lévy. Construction d'un appareil très simple pouvant tourner sur lui-même par le seul jeu de forces intérieures.

L'Œuvre de Henri Poincaré (Ann. Ec. Norm., 1913).

Discours de Réception à l'Académie Française (1926).

Nous n'insistons pas sur ces deux derniers écrits dont les titres sont suffisamment explicites. D'ailleurs n'en est-il pas de même des autres titres généralement longs et cherchant manifestement à exprimer déjà une idée complète? Par contre les Mémoires eux-mêmes sont courts; en moyenne, ceux de cette admirable anthologie n'excèdent guère une douzaine de pages. Quelle leçon pour tant d'auteurs modernes, souvent jeunes, qui s'exaspèrent de ne pouvoir publier leurs premières productions, souvent même leur thèse, dans des Recueils encombrés qu'on projette d'encombrer encore davantage. Les notions d'intégrale abélienne, de groupe abélien, invoquées ci-dessus, font penser, plus généralement, à la manière abélienne. Abel aussi savait être prodigieux et bref et il semble qu'on retrouve dans *Selecta*, sous une forme modernisée, les méthodes incisives du génial adolescent norvégien. La forme moderne est celle des « clefs d'or ». Devant la complication apparente de certaines questions, une propriété fonctionnelle extrêmement nette, concernant souvent une simple singularité, est d'abord mise en évidence. C'est là l'instrument, minime en lui-même, qui broiera cependant, et comme par enchantement, des difficultés énormes à première vue. Le tout était de choisir cet instrument. Le procédé peut-il être recommandé ou relève-t-il d'un génie qu'on n'imite point à volonté? Il peut, en tout cas, être étudié et *Selecta* nous offre, pour cela, de nouvelles et merveilleuses facilités.

A. BUHL (Toulouse).

Emile PICARD. — **Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles avec des applications à la Physique mathématique.** (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule I). — Un vol. gr. in-8° de VIII-214 pages et 73 figures. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1927.

Nouvelle collection scientifique, jusqu'ici mathématique avec deux volumes dus respectivement à MM. Emile Picard et Elie Cartan. Il semble qu'il s'agisse, en principe, de cahiers de cours reflétant un enseignement magistral d'une manière immédiate sans complète recherche du fini didactique. Or, ceci doit pouvoir rendre de très grands services, car des savants de premier ordre, enseignant quelque science en formation, se sont souvent

refusés à une publication de leur enseignement; ils craignaient de manquer de rigueur, remettaient à beaucoup plus tard la rédaction d'un cours retouché et, en attendant, privaient bien des disciples possibles d'aperçus qui, quoique seulement ébauchés, auraient pu jouer un rôle créateur. Maintenant, je dois ajouter que, lorsqu'il s'agit de professeurs tels que MM. Picard et Cartan, les ébauches sont des œuvres d'art qui semblent voisines de la perfection; le cahier devient livre. Mais l'idée de M. Julia n'en est pas moins excellente et personne ne lui reprochera d'avoir commencé sa collection par de trop beaux cahiers.

Dans la présente œuvre de M. Emile Picard, on a plaisir à retrouver, plus développés, nombre de points signalés, dans l'article précédent, à propos de *Selecta*. Il s'agit surtout des équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique dans leurs rapports avec la Théorie des Fonctions et celle des équations intégrales. Et il faut savoir grand gré à l'illustre auteur de ne pas commencer par des généralités relatives à ces dernières, mais d'avoir, au contraire, grandement profité des formules de Fourier et de Cauchy; si bien que c'est l'ordre dans lequel la Science s'est développée qui nous est véritablement présenté ici.

Sur la petite équation de la chaleur $t = p$, on peut aisément apercevoir les exceptions à la validité des théorèmes généraux d'existence concernant les solutions. Des séries entières en x , contenant une arbitraire $\varphi(y)$, ne convergent que pour φ fonction entière.

On sait que ceci est en relation avec des φ qui ne sont pas dans ce cas mais dont on peut approcher autant qu'on veut par fonctions entières d'où un théorème de Weierstrass qui a été le point de départ de la théorie des séries de polynomes et a lié l'analytique au non analytique. L'équation de Fourier précédente régit plusieurs problèmes calorifiques ou électriques liés à l'intégrale de Laplace-Abel; les problèmes aux limites sont relativement simples et susceptibles d'être élégamment résolus à l'aide d'intégrales définies classiques; c'est ainsi notamment qu'apparaissent (p. 43) les fonctions réciproques de Cauchy-Fourier. Plusieurs intégrales, issues physiquement de considérations réelles, donnent aussi lieu à d'intéressantes questions de prolongement dans le domaine complexe. Le principe de Dirichlet, dans le cas du cercle, introduit l'intégrale de Poisson. On peut dès lors mentionner quelques généralités sur l'équation intégrale de deuxième espèce au sens de Fredholm, mais M. Picard nous montre qu'ici, il y a encore beaucoup à faire avec des intégrales définies considérées bien antérieurement. L'intégrale de Cauchy et la notion de valeur principale peuvent être aussi rapprochées des équations intégrales conformément à des remarques publiées, en 1921, par M. Gaston Bertrand; quelques oppositions augmentent d'ailleurs grandement l'intérêt des analogies. Après les problèmes de Dirichlet et de Riemann il convient de signaler celui de Hilbert en lequel

$$u(x, y) + i v(x, y) \quad \text{donne} \quad au + bv + c = 0$$

sur un contour fermé. Les valeurs principales d'intégrales se rencontrent dans nombre d'autres questions où figurent des potentiels et les dérivées tangentielles de ceux-ci. Henri Poincaré l'a montré dans la théorie des marées avec des résultats qui ont encore été perfectionnés, en 1923, par M. Gaston Bertrand.

Nous arrivons maintenant aux équations $\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$ et

notamment à la notion de caractéristique. L'équation en litige est surtout maniable lorsqu'elle est linéaire en r, s, t mais ce cas, outre qu'il est le plus important au point de vue physique suffit à diriger l'analyse dans des voies nouvelles. M. Emile Picard considère ici quatre problèmes fondamentaux : intégrale passant par deux caractéristiques, intégrale et dérivée partielle données sur une courbe, intégrale donnée sur une caractéristique et sur une courbe quelconque, intégrale donnée sur deux courbes quelconques. Des distinctions s'imposent tout de suite quant à l'analyticité des données et des solutions, les équations hyperboliques, où les termes du second ordre sont réduits à s , se prêtant d'ailleurs naturellement à des discussions basées sur la classification indiquée. C'est peu après qu'intervient l'importante notion d'équation adjointe. Le troisième problème conduit à une équation intégrale dite « de Volterra ». La méthode des approximations successives, créée par M. Picard, s'impose encore dans ces questions notamment à propos du quatrième problème. L'équation des cordes vibrantes, celle des télégraphistes font naître des intégrales, périodiques dans le temps et l'espace, qui, chose curieuse et presque paradoxale, sont étrangères à la nature physique du problème (p. 172).

Les travaux de Poincaré sur l'équation des télégraphistes nous font revenir à l'inversion des intégrales définies, au problème d'Abel et à ses généralisations.

La grande question qui va terminer ces brillantes leçons est celle des équations

$$\Delta u + ap + bq + cu = 0 .$$

Pour a, b, c nuls on a l'équation de Laplace, pour a, b nuls celle de Poisson. Ici la matière est beaucoup plus analytique que dans les cas hyperboliques. Les problèmes relatifs à la dérivée normale sont particulièrement délicats. La Théorie des surfaces est impliquée dans toutes ces considérations avec l'équation $s = \sin z$ qui correspond aux surfaces à courbure totale constante (p. 205).

La vingt-troisième et dernière leçon a trait au potentiel sphérique de M. Boussinesq qui satisfait à l'équation de D'Alembert concernant la propagation par ondes. Un tel livre — vraiment c'est plus qu'un cahier — ne peut être qu'un inestimable trésor pour ceux qui n'ont point entendu la parole du Maître. Je crois même que beaucoup de ceux qui l'ont entendue réétudieront avec plaisir ces pages si riches quant à la structure de la Science faite, si pleines de suggestions quant aux progrès de celle qui est à faire.

A. BUHL (Toulouse).

E. CARTAN. — **Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann** (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule II). — Un vol. gr. in-8° de vi-274 pages et 34 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1928.

M. Elie Cartan, à qui on doit tant et tant de travaux de Géométrie, révèle peut-être ici, d'une manière particulièrement nette, le successeur de Gaston Darboux dans la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne. En effet, on peut dire, en gros, qu'un espace de Riemann à *deux* dimensions n'est rien d'autre qu'une surface ordinaire définissable en elle-même et

en ses déformations par un certain ds^2 à deux variables. C'est là ce qu'il s'agit de généraliser pour n variables. On sait que, pour n quelconque, il y a une courbure riemannienne qui ne dépend que du ds^2 et que c'est là aussi la base fondamentale des développements einsteiniens.

M. Cartan a eu recours à un point de départ fort élémentaire. Il considère les vecteurs de l'espace euclidien, passe aux bivecteurs, aux trivecteurs, ... et atteint ainsi la notion générale de tenseur. Du ds^1 on passe au $dM = e_i du^i$ puis au

$$de_i = c_k \omega_i^k = \Gamma_{ir}^k e_k du^r,$$

d'où les symboles de Christoffel qui peuvent immédiatement être liés à la forme lagrangienne des équations de la dynamique. Le ds^2 et la force vive sont des bases à rôles analogues. Quant aux conditions pour qu'un ds^2 soit euclidien, elles s'expriment par la nullité de symboles de Riemann à quatre indices, symboles naissant ici d'une simple permutabilité de dérivées partielles ordinaires. Sauf quand il est dit *normal*, l'espace de Riemann euclidien n'est pas forcément identique à l'espace euclidien; toutefois il admet une représentation polyédrale de nature euclidienne. Les différentes faces qui interviennent ainsi peuvent correspondre de la manière la plus élégante à de très importantes notions analytiques, aux feuilletts d'une surface de Riemann, aux modules de périodicité des intégrales de fonctions algébriques, ...; à coup sûr « surface de Riemann » et « espace de Riemann » sont des expressions qui auraient pu sembler appartenir à des régions bien différentes de la Science mais les créateurs de génie, comme on l'a souvent remarqué, semblent, tôt ou tard, avoir bâti les choses les plus diverses sur un fonds commun.

Les espaces euclidiens tangents ou osculateurs aux espaces de Riemann sont encore des extensions simples de concepts élémentaires; la tangence correspond, par exemple, au plan tangent d'une surface ordinaire. Aussi la courbure et la torsion géodésiques, les lignes conjuguées, ... peuvent elles aisément trouver des généralisations. Mais la plus belle chose que l'on puisse définir ici, c'est le transport, par parallélisme généralisé, conçu par M. T. Levi-Civita. Les géodésiques ou *droites* des espaces de Riemann suivent naturellement, puis les surfaces totalement géodésiques ou *plans*. La considération de ces dernières est nécessaire quant aux notions générales de déplacement et de libre mobilité; celle-ci peut jouer partout si elle joue autour de deux points (Schur).

Avant d'étudier la courbure riemannienne de manière aussi générale que possible, M. Cartan a consacré un chapitre du plus haut intérêt aux espaces à courbure constante les plus simples, à ceux qui donnent les géométries non-euclidiennes. On peut faire cela d'une manière purement analytique ou presque, en invoquant les groupes de substitutions linéaires. Ici, c'est le point de vue le plus géométrique qui domine; la géométrie elliptique de Cayley-Klein correspond aisément à la géométrie sphérique mais il en est de même pour la géométrie hyperbolique avec le secours de cônes de révolution passant par l'absolu. Les représentations conformes de Poincaré peuvent rendre des services analogues. Et il y a des espaces de Riemann localement sphériques ou hyperboliques de même qu'il y en a de localement euclidiens, d'euclidiens à des questions de topologie près.

La courbure riemannienne est associée aux cycles infiniment petits; elle conduit au tenseur de Riemann-Christoffel déjà rencontré dans des cas de

nullité. Sur les surfaces ordinaires, elle devient la simple courbure totale attachée aux rayons de courbure principaux, à l'indicatrice, etc. Il s'ensuit que, dans les espaces de Riemann à trois dimensions, il y a des quadriques indicatrices. A ceci se rattache un théorème d'une curieuse exclusivité qui veut que l'espace euclidien soit le seul admettant un système triple orthogonal formé de surfaces totalement géodésiques. Peut être y a-t-il là la dernière et très forte position que tient encore l'espace euclidien devant les autres espaces qui lui font concurrence pour des raisons nettement physiques.

Les Identités de Bianchi représentent sans doute la suprême élégance qui est au fond de toutes ces questions. Sans elles, pas de Théories d'Einstein de même que sans Identité de Poisson il n'y aurait pas d'équations et de propriétés canoniques.

Les coordonnées normales de Riemann permettent de rayonner autour d'un point par arcs de géodésiques et dans des conditions d'approximation qui assurent l'étude du voisinage à des infiniment petits près dont l'ordre est aisément assignable; il y a là une sorte d'étude locale de l'équation différentielle des géodésiques. De telles questions ne vont pas sans certains scrupules de rigueur auxquels M. Cartan a consacré trois Notes placées en fin de l'ouvrage. La possibilité de la représentation géodésique sur l'espace ordinaire est notamment liée à l'étude des conditions initiales associables aux équations différentielles des géodésiques. La courbure riemannienne est une grandeur superficielle, bivectorielle; elle peut devenir linéaire, simplement vectorielle sur de certaines surfaces de discontinuité traversant le domaine riemannien. C'est là une remarque assez inattendue et très importante.

Enfin, dans les espaces normaux à courbure riemannienne négative ou nulle et quant à leurs représentations sur l'espace euclidien, on peut mettre en évidence de curieuses inégalités concernant les ds^2 et même certaines distances finies. Avec les espaces de recouvrement et l'homéomorphie, l'*analysis situs* apparaît à nouveau; cette dernière partie de la science mathématique peut d'ailleurs exiger à elle seule une théorie des espaces de Riemann. Ne remonte-t-elle pas à Riemann lui-même? Il y a, en tout ceci, de merveilleuses liaisons qui, avec le talent habituel de M. Cartan, sont mises en lumière de façon fort esthétique et avec un grand souci de simplicité géométrique.

A. BUHL (Toulouse).

Bertrand GAMBIEP. — **Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXVI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1927.

Le beau fascicule de M. Bertrand Gambier donne le frisson quand on se prend à songer aux ds^2 à n variables après avoir considéré les difficultés qui apparaissent déjà lorsque n est égal à 2. Cependant ce dernier cas est le plus souple, le plus vraiment géométrique; sa richesse particulière est la plus belle des préfaces quant à l'étude générale des ds^2 . Ici le

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

est immédiatement accompagné des invariants de Gauss (qui contiennent E, F, G et leurs dérivées en u, v), de Minding (en lesquels u et v sont liés), de Beltrami (qui symétrisent, de manière fondamentale, les coefficients transformés E', F', G'). La symétrie ne va pas sans les symboles de Christoffel que Gaston Darboux a presque toujours évités systématiquement. C'est d'abord par la considération des invariants ou, en gros, par la comparaison des courbures qu'on voit si des surfaces à ds^2 et à ds'^2 données sont applicables. Mais ceci n'est qu'un hors-d'œuvre. Le premier grand problème est de trouver toutes les surfaces correspondant à un ds^2 donné ; on lui fait correspondre un système aux dérivées partielles, mélange éclectique de formules de Gauss, Codazzi, Darboux, par un raisonnement préliminaire, d'une extrême élégance, qui institue sur une surface des formules analogues à celles de Frenet. Gaston Darboux, pour obtenir l'équation de Monge-Ampère de la déformation, écrivait, avec le ds^2 ci-dessus,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2$$

puis exprimait que la courbure du second membre était nulle comme, évidemment, celle du premier. Rarement, à coup sûr, des questions aux développements immenses furent amorcées aussi simplement.

Le rôle des asymptotiques est aussi des plus curieux dans le problème de la déformation ; de telles lignes peuvent rester *rigides*. Weingarten, Darboux ont incontestablement donné des résultats fondamentaux et d'une grande perfection, mais non liés. M. Goursat les a réunis par une transformation de Bäcklund. MM. Gau et Gosse ont repris les choses dans un grand esprit de rigueur ; ils ont mis en évidence, ainsi que M. Bertrand Gambier lui-même, le pourquoi des réussites. L'exposé pénétrant de ce dernier nous le fait merveilleusement comprendre.

A. BUHL (Toulouse).

P. APPELL. — **Le problème géométrique des déblais et remblais** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat ; fasc. XXVII). — Un fascicule gr. in-8° de 36 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Si l'éminent auteur de ce fascicule n'avait déjà eu maintes occasions de bien faire connaître le sujet, nous pourrions peut-être commencer par dire que celui-ci, malgré la première apparence, n'est pas relatif à de véritables questions de terrassement. L'art de l'ingénieur est ici très idéalisé : il prête un langage commode à un problème posé par Monge, à propos de volumes, mais qu'on peut finalement rattacher à la géométrie des masses. Le déblai et le remblai sont des masses matérielles équivalentes. On propose de les diviser en éléments correspondants, de même masse, de telle façon que la somme des produits obtenus en multipliant la masse d'un élément du déblai par sa distance à l'élément correspondant du remblai soit un minimum. Pratiquement c'est bien là, si l'on veut, la recherche d'un mode de transport aussi avantageux que possible ; théoriquement, c'est un problème qui relève du Calcul des variations et renferme, en germe, les aperçus géométriques les plus ingénieux et les plus inattendus. Tout d'abord, déblai et remblai n'ont trois dimensions que dans le cas le plus complexe ; ce peuvent être des lignes, puis des surfaces, voire des systèmes ponctuels discontinus d'où

l'on passera aux cas continus par d'habiles passages à la limite. Déjà, dans le cas discontinu, on aperçoit l'un des principes fondamentaux de Monge, celui qui rend les routes normales à une surface. C'est l'ouverture sur une belle théorie des congruences. Le cas des déblais et remblais superficiels conduit à des surfaces telles qu'un point donné se projette sur chaque normale au milieu du segment formé par les centres de courbure principaux. Les termes de *congruences*, *surfaces de M. Appell* ont même été consacrés par l'usage. Ces dernières surfaces admettent une théorie analogue à celle des surfaces minima, bien que plus élevée. Les extrémités des routes en déblais et remblais superficiels, peuvent y engendrer des courbes dites *séparatrices* par Dupin.

Un des aspects curieux du sujet est que de grands géomètres, comme Monge et Dupin, ont donné des résultats élégants et exacts au moyen de raisonnements mauvais et même faux.

M. Appell a rétabli partout la rigueur en accentuant encore la note élégante, ce dont il n'y a pas lieu de s'étonner, tant la manière est dans les habitudes de ce grand esprit.

A. BUHL (Toulouse).

Emile COTTON. — **Approximations successives et équations différentielles** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXVIII). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Cet exposé a trait aux théorèmes d'existence concernant les équations différentielles ordinaires. Il s'agit naturellement des travaux fondamentaux de Cauchy-Lipschitz mais, à la clarté des méthodes d'approximations successives dues à M. Emile Picard, on peut remplacer les équations différentielles initiales par des équations intégrales. Dès lors, le point de vue s'élargit et l'on se trouve finalement en présence de méthodes propres à établir l'existence de solutions, à la fois, pour les équations différentielles et pour les équations intégrales, ces dernières pouvant d'ailleurs appartenir au type de Fredholm ou au type de Volterra.

Une grande importance est donnée aux systèmes linéaires, homogènes puis pourvus de seconds membres; le cas des systèmes dépendant de paramètres arbitraires donne aussi lieu à d'importantes généralités. Les solutions asymptotiques à une solution particulière, c'est-à-dire s'en rapprochant indéfiniment, quand la variable devient infinie, sont profondément étudiées d'après Poincaré, Liapounoff, Bohl. Et, de fait, si connaître une solution particulière, d'une équation ou d'un système d'équations différentielles, ne sert guère, en général, pour faire des constructions plus étendues par méthodes exactes, il y a, au contraire, de nombreuses méthodes approchées à développer autour d'une solution *noyau*, ce dernier mot n'étant pas écrit au hasard et venant rappeler les noyaux des équations intégrales.

M. Emile Picard, dans son *Traité d'Analyse*, a beaucoup approfondi le cas de l'équation du second ordre dont une courbe intégrale, au lieu d'être assujettie à passer par un point avec une direction déterminée, est assujettie à passer par deux points. Ici la question est dominée par les équations intégrales, à limites fixes, qui peuvent d'ailleurs conduire à des généralisations construites directement par M. Picard.

En somme, les théorèmes d'existence relatifs aux équations différentielles ne sont pas choses rigides à approfondir une fois pour toutes ; ils sont, au contraire, fort souples et peuvent être indéfiniment variés surtout d'après la forme que l'on donne à des équations ayant, à part ce point de vue formel, le même degré de généralité. De tels fondements paraîtront toujours assez austères mais M. Emile Cotton les a examinés avec beaucoup d'aise et de sûreté.

A. BUHL (Toulouse).

C. GUICHARD. — **Les courbes de l'espace à n dimensions** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat ; fasc. XXIX). — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Comme l'indique M. G. Kœnigs dans une brève préface, une partie de l'œuvre du regretté Guichard revit, dans ce fascicule, grâce à M. Raymond Jacques, professeur à l'Université de Montpellier. Félicitons ce dernier de sa modestie, car il aurait certainement pu prendre figure d'auteur. Toutefois, les choses étant présentées comme elles le sont, on comprend, une fois de plus, pourquoi Guichard était le disciple préféré de Darboux ; on retrouve ici l'esprit élémentarisé dans les *Principes de Géométrie analytique*, esprit qui cherche, dans l'imaginaire, la clef véritable de toutes les harmonies géométriques. Que des considérations puissent être vraies, par exemple, pour toutes les droites *sauif* pour les droites *isotropes* et le véritable géomètre s'acharnera sur ces éléments exceptionnels qui, en effet, se révéleront particulièrement propres à éclaircir la notion de droite, de même qu'au point de vue fonctionnel, ce sont les singularités qui déterminent et éclairent la fonction.

Il ne faudrait pas non plus prendre ici le mot *courbe* trop à l'étroit ; il s'agit d'un procédé pénétrant d'exploration de tout l'hyperespace à l'aide d'une seule variable. Si l'on décrit surtout des courbes c'est tout cet hyperespace qui est étudié. D'ailleurs on voit, dès le début, que trois points *non* en *ligne* droite définissent un 1-plan, que quatre points, non en un même 1-plan, définissent un 2-plan, etc., d'où, de proche en proche, des $(p - 1)$ -plans qui peuvent être osculateurs à une courbe. De même la notion de développable est inséparable de celle de courbe.

Après les courbes ordinaires viennent les courbes p -fois isotropes qui correspondent à certains systèmes différentiels quadratiques ; ceux-ci peuvent conduire aux surfaces applicables et aux systèmes triplement orthogonaux. Une courbe p -fois isotrope ne peut exister que dans un espace d'ordre au moins égal à $2p - 1$; c'est donc encore une singularité caractéristique de cet espace général.

Enfin, il y a des familles de cercles qui conduisent tout naturellement aux familles de sphères, aux coordonnées cycliques et sphériques de Darboux. Il y a des congruences et des complexes avec nombre de singularités inexistantes dans l'espace ordinaire. On voit que M. Jacques nous présente, au nom de Guichard, une puissante analyse pangéométrique. Après de telles études, on voit mieux ce qu'il faut et ce qu'il ne faut pas demander à l'espace à trois dimensions.

A. BUHL (Toulouse).

LOUIS DE BROGLIE. — **La Mécanique ondulatoire** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey ; fasc. I). — Un fascicule gr. in-8° de 56 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Le succès du *Mémorial des Sciences mathématiques* vient d'engendrer le *Mémorial des Sciences physiques*. Une chose aussi heureuse n'a guère besoin d'être soulignée. Mais ce qui achève tout naturellement de l'imposer à l'attention c'est le nom de M. Louis de Broglie, c'est le titre du premier fascicule de la nouvelle collection : La Mécanique ondulatoire.

Science nouvelle et science prodigieuse entrevue peut-être par Anaxagore qui pensait que tout l'espace physique pouvait être perçu en une région quelconque de cet espace, que tous les corps s'interpénétraient par radiations mystérieuses. Aujourd'hui, toutefois, science précise, réplique physique de la Théorie des fonctions. De même qu'aucune fonction n'existe sans singularités, le monde physique, en particulier le monde matériel, n'est qu'un assemblage de singularités appartenant à un continuum à constitution périodique. Le point matériel peut être perçu dans un groupe d'ondes.

L'analyse de la théorie repose sur l'équation dalembertienne de la propagation des ondes et sur les extensions de cette équation qui peuvent d'ailleurs être mises en relation avec la Gravifique d'Einstein, celle-ci étant, pour M. de Broglie, une science géométrique qui doit précisément être complétée, par la Mécanique ondulatoire, de même que l'optique géométrique doit être complétée par l'optique ondulatoire. On peut dire aussi que l'équation de Jacobi, accompagnant les équations canoniques d'Hamilton, rentre ici dans les équations de la Physique mathématique et que les principes de minimum de la dynamique analytique sont également à la base de la moderne dynamique.

Ce qui fait la valeur de théories de plus en plus audacieuses ce n'est pas — point de vue toujours soutenu ici — l'atteinte de l'insaisissable et d'ailleurs indéfinissable vérité, c'est la puissance synthétique ; or, ici la synthèse atteint jusqu'aux oppositions mêmes de la théorie de l'émission et de la théorie des onduations. Les grains de lumière de Newton existent au sein des ondes. Quelle magnifique leçon philosophique pour les théoriciens incomplets cramponnés à un algorithme unique. Quelles belles leçons de mathématiques il y a, ici aussi, quant à la représentation de singularités par développements à termes périodiques ! M. Louis de Broglie est l'Einstein français et le premier fascicule du *Mémorial des Sciences physiques* est un éblouissement.

A. BUHL (Toulouse).

Armand DE GRAMONT. — **La Télémétrie monostatique** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey ; fasc. II). — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages, 45 figures et une planche hors texte. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Ce deuxième fascicule a trait à l'optique géométrique, non pas à celle qui, convenablement interprétée et prolongée, est à visées philosophiques touchant jusqu'à la structure de l'Univers, mais à l'optique pratique à visées comportant... des prismes, des lentilles et des miroirs.

Le télémètre, comme le nom l'indique, sert à évaluer des distances d'une manière immédiate et généralement sans changer de place. Tous les traités

de géométrie ou de trigonométrie élémentaire contiennent quelques aperçus sur l'évaluation des distances, des hauteurs, ... à extrémité inaccessible. On mesure une *base* sur le terrain puis des angles et, la théorie n'incitant à se presser en rien, on dégage l'inconnue qui est un côté ou une hauteur de triangle. Il y a, d'autre part, des individus qui, d'eux-mêmes et sans le secours d'aucun appareillage, sont d'assez bons télémètres; ils ont pu s'habituer à l'évaluation des distances soit en se déplaçant légèrement soit en balançant simplement la tête à droite et à gauche mais, de toute évidence, la précision fait complètement défaut et tel qui réussit assez bien dans le sens horizontal ne fait plus rien qui vaille dans le sens vertical. Le véritable télémètre ne doit admettre aucune hésitation; il est de types variés. Il peut contenir la base ou la prendre sur le but, il donne des images dédoublées, coupées, symétriquement retournées ou relevant de la vision stéréoscopique; il ne fait souvent que perfectionner ingénieusement la télémétrie naturelle qui donne l'impression du relief. Généralement, il n'y a qu'à comparer deux images ou deux fragments d'image sur un micromètre approprié.

Nous n'avons pas à nous égarer ici dans des descriptions instrumentales. Indiquons seulement, avec M. de Gramont, qu'aujourd'hui le problème est pratiquement bien résolu et qu'on sait établir couramment des télémètres qui peuvent répondre aux conditions d'emploi les plus sévères. Ceci n'empêche pas que l'ingéniosité des opticiens pourra toujours se donner librement carrière. Le sujet est joli; l'art optique peut aider ici à l'art pictural ou photographique, ce qui est bien remarquable dans un problème qui jusqu'à présent, intervenait surtout en art militaire.

A. BUHL (Toulouse).

Michel PETROVITCH. — **Leçons sur les Spectres mathématiques**, professées à la Sorbonne en 1928. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-92 pages. Prix: 20 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris, 1928.

Ces *Leçons* ne sont point sans précédent; elles rappellent un premier ouvrage publié par M. Petrovitch, en 1919, et dont *L'Enseignement mathématique* a déjà rendu compte (t. 21, 1920, p. 67). Le point de vue n'a pas changé; il est simplement devenu plus complet, plus harmonieux et, peut-être, d'une forme pédagogique plus accessible.

Une première partie du volume traite des spectres d'ensembles numériques. Les spectres sont des nombres décimaux, généralement illimités, dont la distribution des décimales correspond à toutes les particularités de structure que peuvent présenter des ensembles. De tels nombres peuvent présenter des *cannelures* formées de chiffres significatifs et séparées par des *espaces sombres* formés de zéros qui jouent un rôle dispersif tantôt constant tantôt variable et rythmé. Il y a une fonction $\Phi(x)$, dite *génératrice spectrale*, qui peut fournir un spectre cannelé de toute suite d'entiers. Plus généralement encore, les spectres peuvent être liés à des séries entières, les variations du rythme conduisant jusqu'aux fonctions entières hypertranscendantes, c'est-à-dire ne satisfaisant à aucune équation différentielle de construction algébrique. Les suites de nombres quelconques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs, sont susceptibles de subir des *transmutations* qui les ramènent aux suites primitivement considérées.

Avec une seconde partie, nous abordons les spectres des fonctions. Celles-ci sont définies sur des ensembles et, comme tout ensemble a un spectre, il doit y avoir une correspondance fonctionnelle entre un spectre d'ensemble et la nouvelle notion de spectre de fonction.

Pour les fonctions analytiques, les théorèmes fondamentaux prennent une forme spectrale particulièrement saisissante ; le spectre ne peut être entier sans que la fonction soit identiquement constante, il ne peut être commensurable que pour une fraction rationnelle, etc.

Enfin, le spectre d'une fonction peut s'apercevoir au travers de transmutations fonctionnelles qui permettent, par exemple, de l'avoir sous forme d'intégrale définie. Il y a aussi des spectres approchés de même qu'il y a des représentations polynomiales approchées.

Dans la troisième partie, M. Petrovitch traite, aussi généralement que possible, de la méthode spectrale. Il est certain, en effet, qu'on peut considérer tout ce qui précède comme formé de cas particuliers relevant du problème général qui consisterait à ne voir qu'un seul nombre inconnu, là où l'analyse ordinaire en verrait plusieurs autres ou même une infinité d'autres. Ainsi imaginons les coefficients rationnels d'une série écrits sous forme décimale en pratique forcément limitée ; cela peut faire une infinité d'inconnues. Cependant, en écrivant ces coefficients bout à bout ou sous forme de cannelures spectrales, on peut n'y voir qu'un nombre unique. Les problèmes qui peuvent se simplifier ainsi ne doivent pouvoir appartenir qu'à des catégories spéciales mais M. Petrovitch peut prétendre que c'est justement à ceux là qu'il a voulu consacrer son livre et les exemples qu'il traite sont assez variés pour donner droit de cité, en Analyse, à une méthode qu'il manie d'ailleurs avec beaucoup d'ingéniosité.

A. BUHL (Toulouse).

R. FUETER. — **Vorlesungen über die singulären Moduln und die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen.** Zweiter Teil. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Band XL 1,2). — 1 vol., gr. in-8°, p. 143-358 ; 4 figures ; prix R.-M. 10, relié R.-M. 11.60 ; B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1927.

Est-il besoin d'insister sur l'intérêt et l'importance des théories que M. Fueter expose d'une manière si remarquable dans ses leçons sur les modules singuliers et la multiplication complexe des fonctions elliptiques ? Nous avons déjà cherché, en rendant compte de la première partie de ce cours, parue en 1924, à donner une idée des grands problèmes abordés par M. Fueter. Le but principal de son ouvrage, rappelons-le, est la démonstration du théorème fondamental de Kronecker sur les équations algébriques qui sont abéliennes dans un corps quadratique imaginaire $k(\sqrt{m})$. Kronecker avait affirmé que les racines de ces équations sont des fonctions rationnelles de certains nombres algébriques fournis par la multiplication complexe, de même que les racines des équations abéliennes absolues sont des fonctions rationnelles des racines de l'unité. Ce n'est que dans ces dernières années que M. Fueter a réussi à trouver de ce théorème admirable, qu'il a précisé, une démonstration générale, à l'aide d'une méthode qui présente une certaine analogie avec celle dont M. Hilbert a fait usage dans son mémoire sur le premier théorème de Kronecker.

Cette belle démonstration est exposée ici avec tous les développements que comporte un sujet de cette importance et de cette ampleur.

M. Fueter commence par consacrer un paragraphe des plus intéressants à la théorie des corps abéliens relatifs, en s'arrêtant surtout sur les propriétés et les notions qui lui seront utiles dans cette partie de son ouvrage. Il reprend ensuite, en se plaçant cette fois-ci au point de vue arithmétique, l'étude des corps de la multiplication complexe, abéliens dans k , déjà envisagés dans la première partie de son cours. Comment se décomposent, dans ces corps abéliens, les idéaux premiers de k ? La solution s'obtient par un raisonnement où interviennent à la fois, et de la manière la plus heureuse, l'arithmétique et la théorie des fonctions. Mais c'est à l'aide de considérations d'un ordre différent s'appuyant sur les méthodes de Dirichlet que M. Fueter arrive, dans les paragraphes suivants, à établir certaines propriétés, très curieuses, des équations de classes et à montrer en particulier que ces équations sont irréductibles dans k .

Ici s'affirme une fois de plus l'importance de la notion d'anneau (Ring) et surtout de celle de rayon (Strahl), introduite par M. Fueter en 1903. Les corps de classes correspondants (Ringklassenkörper, Strahlklassenkörper) jouent, en effet, un rôle de tout premier plan dans cette étude. Un long chapitre est consacré à la détermination des discriminants relatifs de ces corps, problème délicat et difficile, où la théorie des fonctions vient encore au secours de l'arithmétique en fournissant, et cela s'explique par l'origine même de ces corps abéliens, l'instrument de recherche le plus approprié et le plus naturel. Je regrette de ne pouvoir donner une idée de cette méthode si simple et si belle.

Cette étude des corps abéliens relatifs, faite au double point de vue de l'arithmétique et de la théorie des fonctions, nous conduit assez rapidement au grand théorème de Kronecker-Fueter, que l'auteur appelle le « Vollständigkeitssatz » et qu'il énonce de la manière suivante: tout corps abélien dans un corps quadratique imaginaire est contenu dans un corps de modules singuliers et de valeurs elliptiques singulières.

Nous voilà donc en possession des éléments ultimes à partir desquels se construisent tous les corps abéliens et toutes les équations abéliennes de Kronecker. Et les méthodes de M. Fueter permettent en même temps d'obtenir des éléments dans chaque cas particulier. C'est à ce problème intéressant, qui éclaire d'un jour nouveau les théories générales exposées dans cette étude, qu'est consacré le dernier chapitre du livre dû à la plume de M. Max Gut.

On ne saurait assez souligner l'importance du rôle joué dans cette étude par la théorie des fonctions. C'est elle qui a fourni ici les méthodes les plus puissantes et les plus sûres. C'est elle qui a préparé la voie à la démonstration de ces belles lois de réciprocité dans les corps quadratiques imaginaires, auxquelles M. Fueter vient de consacrer deux mémoires du plus haut intérêt dans les « Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften » de Göttingen.

Puissent les lecteurs du beau livre de M. Fueter y trouver les suggestions de nouvelles recherches.

William BURNSIDE. — **Theory of Probability**. Edited, with a memoir, by A. R. FORSYTH. — 1 vol. relié grand in-8°, xxx et 106 p. ; prix 10 sh. 6 d. ; Cambridge University Press, 1928.

C'est en 1918 que l'étude d'un problème particulier conduisit Burnside à s'occuper de calcul des probabilités. Engagé dans cette voie, il ne tarda pas à obtenir des résultats intéressants qu'il fit connaître dans une suite de notes publiées dans les *Cam. Phil. Soc. Proc.* et le *Messenger of math.* En 1925 il entreprit de faire un exposé systématique des principes de ce calcul. Le manuscrit était à peu près achevé, lorsque la maladie vint brusquement mettre fin à ses recherches, et son livre n'a pu être publié qu'après sa mort, par les soins de M. A. R. Forsyth.

Malgré son caractère élémentaire, ce petit volume ressemble peu aux ouvrages classiques sur le calcul des probabilités. Il porte, même dans les pages consacrées aux problèmes les plus simples, l'empreinte d'un esprit original qui a beaucoup réfléchi sur les principes de l'*ars conjectandi*. Des remarques et des suggestions intéressantes, jamais banales, une clarté et une précision remarquables dans l'exposition des théories les plus délicates, en rendent la lecture très attrayante. Je mentionnerai les chapitres qui traitent des probabilités continues et de la théorie des erreurs, qui l'a toujours particulièrement intéressé. Des exemples très nombreux, choisis avec art et traités jusqu'au bout, les uns inédits, d'autres connus, mais abordés par des côtés nouveaux, permettent de mieux saisir la portée et la valeur réelle des principes introduits. Ce petit volume constitue une excellente introduction aux théories de calcul des probabilités et je ne puis que le recommander aux lecteurs de l'Enseignement mathématique. M. Forsyth l'a fait précéder d'une très intéressante notice sur la vie et l'œuvre de Burnside, écrite pour la *Royal Society*. Une liste des travaux de Burnside sur le calcul des probabilités, ainsi qu'une table alphabétique des matières, très détaillée, terminent le volume.

D. MIRIMANOFF (Genève).

K. KNOPP. — **Aufgabensammlung zur Funktionentheorie**. II. Teil ; *Aufgaben zur höheren Funktionentheorie* (Sammlung Göschen, Bd. 878). — 1 vol. relié, 143 p., prix R.M. 1.50 ; Walter de Gruyter et Co, Berlin et Leipzig, 1928.

Il y a quinze ans environ, M. Knopp publiait dans la collection Göschen une excellente Théorie des fonctions, dont une édition nouvelle a paru récemment. Un autre volume de la même collection, publié en 1923, contenait un choix intéressant d'exercices relatifs aux théories exposées dans ce petit traité.

Le volume qui vient de paraître en forme un complément nécessaire. D'un caractère moins élémentaire, il s'adresse à des étudiants plus avancés. Les problèmes contenus dans ce volume se rapportent surtout à la 2^{me} partie du traité de M. Knopp et au volume de M. Bieberbach « Einführung in die konforme Abbildung », publié dans la même collection. Il rendra certainement de précieux services à nos étudiants, en leur faisant saisir le vrai sens des admirables théories créées par Cauchy, Riemann et Weierstrass et en dirigeant leur curiosité sur des problèmes abordés par les géomètres contemporains.

D. MIRIMANOFF (Genève).

George D. BIRKHOFF. — **Dynamical Systems.** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Volume IX.) — Un volume gr. in-8° de VIII-296 pages. 3 \$. New-York, 1927.

Ceci est de la Mécanique théorique développée avec le talent universel de M. Birkhoff. L'illustre auteur poursuit surtout l'étude des équations de Lagrange et des équations canoniques de Hamilton ; il a prolongé Jacobi, Hill, Poincaré et travaille maintenant avec MM. Hadamard, Levi-Civita, Sundman, Whittaker. La méthode est surtout analytique ; elle étudie les conditions d'intégrabilité, les invariants, les groupes attachés aux équations dynamiques et cherche à voir ensuite les systèmes dynamiques analytiquement maniabiles qui correspondent à ces conditions, à ces propriétés invariantes ou à ces groupes. L'introspection mathématique joue avant l'observation. Quelle difficulté que d'analyser brièvement un livre qui vous émerveille à chaque page ! Essayons cependant d'indiquer le plus lumineux.

Tout d'abord, à propos des systèmes conservatifs, je trouve avec plaisir un renvoi aux travaux de Voss et des frères E. et F. Cosserat. L'éminent directeur de l'Observatoire de Toulouse a d'ailleurs fait une découverte de premier ordre en créant une Energétique générale appuyée sur la Théorie du trièdre mobile, théorie pouvant jouer un rôle analogue au rôle des théories de Maxwell.

Les équations de Lagrange s'établissent de la manière la plus simple pour des systèmes de points matériels ; on peut leur laisser cette origine élémentaire et examiner ensuite les cas plus complexes où elles subsistent. Il y a aussi des manières « internes » et « externes » de caractériser les systèmes lagrangiens ; il y a des réciprociétés, des réversibilités qui maintiennent l'invariance des équations pour des systèmes dynamiques nettement différents mais pouvant être symétriquement comparés ou opposés. A signaler aussi, tout particulièrement, la méthode des multiplicateurs permettant de réunir linéairement les symboles lagrangiens de manière à obtenir une dérivée exacte par rapport au temps. Ce cas en réunit aisément d'autres à intégrales élémentaires.

Les méthodes intégrales variationnelles portent à considérer les équations hamiltoniennes comme rentrant dans des équations pfaffiennes plus générales. Des problèmes d'équilibre, on passe aisément à ceux de mouvement périodique et, sous forme de multiplicateurs attachés plus spécialement aux équations canoniques, on retrouve les « exposants caractéristiques » introduits par Poincaré dans le premier volume de ses *Méthodes nouvelles*. Quant aux formes pfaffiennes, elles ne vont évidemment pas sans expressions tourbillonnaires propres à conduire aux théories électrodynamiques.

La stabilité dans les mouvements périodiques peut être de différents types tous plus ou moins prévus par Poincaré ; c'est encore une question de multiplicateurs exponentiels imaginaires ou réels. Un mouvement périodique particulièrement simple, tel le mouvement de Képler, peut être perturbé, compliqué, sans perdre son caractère périodique, de par une sorte de prolongement analytique. C'est toujours, originairement, du Poincaré, mais, chose plus remarquable encore et qui ne va pas sans quelque émotion, c'est d'arriver maintenant au dernier théorème de Poincaré, à celui dont il ne publia qu'une démonstration incomplète peu avant sa fin si brusque. C'est le théorème de l'anneau transformé en lui-même mais avec deux points invariants, théorème aux applications nombreuses quant aux mouvements périodiques voisins d'un premier mouvement, quant aux

configurations géodésiques sur les surfaces convexes..... Deux chapitres suivent sur la théorie générale des systèmes dynamiques et le cas de deux degrés de liberté. C'est une sorte de théorie des ensembles de mouvements avec très peu de formules ou avec d'ingénieux procédés graphiques tranchant, dans l'espace-temps, des questions d'*analysis situs*.

Le dernier chapitre a trait au Problème des Trois Corps envisagé avec les méthodes inaugurées par Sundmann. C'est la nature des collisions possibles ou impossibles qui régit cette savante analyse qui, par ce fait, se trouve dépendre également de l'*analysis situs*.

En voici assez pour dépeindre le prodigieux intérêt de ce livre qui développe, de manière très accessible et extrêmement élégante, des questions souvent considérées comme très ardues. Comme il arrive souvent, ces questions n'ont pas été traitées d'abord avec le maximum de simplicité mais on ne voit guère maintenant ce qui pourrait être plus clair que l'exposé de M. Birkhoff.

A. BUHL (Toulouse).

Emile BOREL. — **Leçons sur les séries divergentes.** Deuxième édition revue et entièrement remaniée avec le concours de Georges BOULIGAND. — Un vol. gr. in-8° de XII-260 pages. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C^{ie}. Paris, 1928.

La première édition de cet ouvrage date de 1901. *L'Enseignement mathématique* en rendit compte par la plume d'Ettore Bortolotti (T. IV, 1902, p. 457). Que de chemin parcouru depuis lors. La question est intimement mêlée à celle du prolongement analytique attaquée par Mittag-Leffler à l'aide de méthodes de sommabilité et sur laquelle le regretté savant n'a dit son dernier mot qu'en 1918. Ce point d'histoire porte d'abord à établir une distinction à laquelle M. Borel tient beaucoup et non sans raison. Etudier la série *divergente*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

c'est étudier

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

pour $z = 1$, donc hors du cercle de convergence; le prolongement analytique peut intervenir, mais il n'intervient pas forcément, ne serait-ce que parce que la première série peut-être étudiée tout autrement que par l'adjonction de la variable z qui a donné la seconde.

La théorie des séries asymptotiques de Poincaré, les développements en fractions continues offrent des ressources des plus élégantes pour donner certains droits de cité à la divergence.

Maintenant, il faut reconnaître, en fait, que, depuis 1901, c'est surtout la *sommabilité*, généralement cotoyée par le prolongement analytique, qui a entraîné le plus de travaux et de développements nouveaux. Cette constatation ne peut déplaire à M. Borel, créateur de la notion. Elle est d'ailleurs en évidence dans le présent livre dont les deux premiers chapitres ne sont pas plus étendus que dans la première édition, malgré quelques transformations très heureuses. L'extension ne commence qu'avec le Chapitre III dédié aux séries sommables.

M. L. Féjer, en 1904, faisait un coup de maître en créant une sommabilité des séries de Fourier conduisant à une intégrale définie plus simple que celle correspondant à la sommation proprement dite. Cela donna envie de rechercher dans quels cas on pouvait espérer des résultats analogues et on réussit à indiquer des conditions précises quant à l'application de la méthode des moyennes de Cesàro.

Mais le plus beau est certainement du côté des séries en $c_n s_n$ où c_n est emprunté à un développement de fonction entière, c'est-à-dire toujours convergent, et domine, de par cet honnête caractère, le malin esprit de divergence des s_n . Le champ de bataille où l'on pouvait constater la victoire de ces excellents c_n ne fut d'abord qu'un polygone puis les côtés de celui-ci s'incurvèrent, devinrent des courbes algébriques plus générales; les fonctions entières, probablement indignées contre les s_n , apportèrent, dans la coalition formée contre ceux-ci, un armement prodigieux et imprévu. Elles dévoilèrent des modes de croissance insoupçonnés jusqu'au jour où la série en $c_n s_n$ fut incontestablement maîtresse du champ complexe tout entier. J'ai l'air de plaisanter. Pas du tout. Tout cela possède une vie intense et tragique, comme celle des microbes, des insectes ou des hommes. Ces derniers points, à vrai dire, ne sont développés que sommairement dans la présente et nouvelle édition. Le rapprochement entre les séries divergentes et les séries (M) ou séries de polynômes de Mittag-Leffler est conservé, conformément aux idées initiales de M. Borel, mais un Appendice nous apporte d'autres analogies du plus grand intérêt. Il y a une méthode de facteurs de convergence, en relation avec les travaux de M. Le Roy qui transforme une $f(z)$, holomorphe autour de l'origine, en une fonction entière dépendant d'un paramètre t ; quand ce t tend vers 1, cette fonction entière tend vers $f(z)$ dans une certaine partie de l'étoile. Mittag-Leffler approchait de même, généralement par double limite, de toute $f(z)$ à étoile donnée et dans des régions de plus en plus étendues de cette étoile. Ce sont des résultats à comparer. D'autres extensions ne vont pas sans les séries de Dirichlet à sommabilité étudiée par Bohr, Hardy, Riesz.

Enfin disons quelques mots des fonctions quasi-analytiques correspondant à l'existence de certaines séries numériques divergentes; la quasi-analyticité est débarrassée de la variable complexe qui semble précisément ne pouvoir jouer un rôle fonctionnel qu'au milieu de conditions de convergence qu'un esprit pénétrant arriverait à réduire, tout en conservant l'indéfinie dérivabilité. Ce fut là une grande idée de M. Borel, contestée par Mittag-Leffler et triomphant définitivement avec MM. Denjoy et Carleman. L'espace manque pour en dire davantage. M. Georges Bouligand a apporté à M. Borel, pour cette seconde édition, ce que ce dernier appelle un inappréciable concours. On ne saurait mieux dire. Même dans une erreur apparente, qui me concerne, M. Bouligand fait une trouvaille profonde. Dans la liste des ouvrages à consulter, placée en tête du volume, il cite mon fascicule du Mémorial sur les *Formules stokiennes* au lieu de celui consacré aux *Séries analytiques*. Peu importe. Les deux fascicules sont bâtis sur la transformation des intégrales multiples, comme l'œuvre de Weyl également citée à propos des séries divergentes. Invention du diable disait Abel en parlant de ces séries. Mais qui ne sait que les tours du diable sont souvent profonds et intéressants.

E. HELLINGER und O. TOEPLITZ. — **Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten.** Sonderausgabe aus der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit einem Vorwort von E. HILB. — Un volume grand in-8° de iv-282 pages; relié, 16 M.; B. G. Teubner, Leipzig und Berlin. 1928.

Cet ouvrage, comme il est indiqué en sous-titre, est un extrait de l'Encyclopédie allemande des Sciences mathématiques. La pagination (p. 1335 à 1616) est même conservée, ce qui était obligatoire, étant donné les centaines de renvois en lesquels cette pagination intervient. On connaît la rédaction encyclopédique; c'est généralement peu d'accord avec un exposé didactique et cependant, ici, les choses sont si bien enchaînées qu'un néophyte bien doué pourrait prendre ce beau livre pour livre d'étude. Il aurait à développer bien des choses mais ce serait un travail plein de profit. Ceux qui connaissent tant soit peu la question — et qui donc l'ignore totalement? — ont là une magnifique occasion d'étendre leurs connaissances dans le sens des plus modernes applications. Traduisons d'ailleurs la courte préface de M. Hilb: » Il y a maintenant un quart de siècle que les premiers travaux « fondamentaux sur les équations intégrales ont été publiés; les vagues « de production en ce domaine ont véritablement afflué. C'est pourquoi une « exposition d'ensemble semble aujourd'hui d'une importance particulière « pour indiquer, en regard de ce qui est atteint, les questions encore ouvertes « qu'il convient de soulever. En de nombreuses années de travail commun, « les deux auteurs ont soumis la présente littérature à une pénétrante « analyse, ils ont examiné la portée des méthodes et des résultats et décou- « vert, entre ceux-ci, maintes nouvelles liaisons. L'aboutissement de ce « travail pénible est tout entier dans le présent article; c'est un guide indis- « pensable pour qui veut pénétrer profondément, surtout quant aux appli- « cations, un domaine aussi exceptionnellement important. Par une telle « lecture, le chercheur sera incité à de nouvelles recherches et j'ai la ferme « conviction que cet exposé placera les équations intégrales, et peut-être « plus encore les problèmes qui prennent racine en la théorie de telles « équations, au centre véritable de l'intérêt scientifique actuel. » Cette conclusion paraît, en effet, tout ce qu'il y a de plus exact. Le point de vue le plus élémentaire est celui qui fait de la théorie des équations intégrales une généralisation de celle des substitutions linéaires dans leur rapport avec les formes quadratiques. Ceci nous dirige vers la géométrie générale, vers le calcul tensoriel, vers les groupes comme l'a si joliment montré M. H. Weyl en des travaux publiés en ces dernières années. De ce côté la marée est loin d'être étale, si jamais elle peut l'être, et il est vraisemblable au contraire que les équations intégrales ont encore à bondir dans des directions nouvelles. Comment essayer de donner une idée matérielle de l'extrême richesse de documents accumulés par MM. Hellinger et Toeplitz. Que reproduire de leurs 578 citations dont presque toutes comprennent de nombreuses sous-citations. Les auteurs analysés sont plus de 300. Je pourrai bien dire quelques mots pour les plus célèbres, mais ce sont justement ceux-là qui en ont le moins besoin.

Je préfère conclure à l'œuvre parfaitement homogène, ne laissant rien dans l'ombre, ne négligeant rien et permettant, à l'heure actuelle, d'avoir une vue d'ensemble de la Théorie des Equations intégrales avec une grande économie de pensée.

Th. COPPEL, Georges FOURNIER, D. K. YOVANOVITCH. — **Quelques suggestions concernant la Matière et le Rayonnement.** (Collection de Suggestions scientifiques publiée sous la direction de Léon Brillouin; fasc. I). Un fascicule in-8° de 48 pages. Prix: 6 francs. A. Blanchard, Paris, 1928.

M. Léon Brillouin, en ayant recours à trois collaborateurs distingués, inaugure une nouvelle collection de fascicules particulièrement brefs. Rien ne saurait être plus utile aux développements de la Science. Celle-ci vit, plus que jamais, de suggestions, de précisions devançant l'expérience. Que d'idées ont été perdues parce que leurs auteurs craignaient d'être traités de rêveurs, d'utopistes ne sachant ni attendre, ni provoquer la confirmation des faits. A côté de cela il y a certainement des créateurs d'élucubrations ne méritant aucune attention mais, quand le choix sera fait par M. L. Brillouin, nous serons sûrs de n'avoir à méditer que ce qui est vraiment digne de méditation. Et le premier fascicule publié aujourd'hui vient remarquablement confirmer ce prologue.

Les auteurs nous montrent le chemin parcouru depuis dix ou douze ans, depuis qu'Einstein utilisa franchement l'espace de Riemann en matière astronomique. Beaucoup d'esprits virent alors, en les ds^2 employés, des procédés de mesure subversifs. Que diraient-ils aujourd'hui alors que la notion même de *mesure* est à éliminer de la microphysique et qu'il n'y peut plus rester que celle de *dénombrement*. C'était fatal. Voici, à coup sûr, plus d'un demi-siècle que les mathématiciens sont d'accord sur le rôle fondamental qu'il convient d'attribuer au nombre entier; ce fut la première théorie quantique moderne. Pourquoi les physiciens ont-ils tant tardé à adopter cette manière de voir? Et, maintenant qu'ils l'adoptent, on s'aperçoit que ce modernisme est millénaire.

Les Grecs avec leur Univers à identités arithmétiques, à harmonies analogues à celles des intervalles musicaux étaient aussi partisans de la quantification. Cela ne les empêcha pas d'avoir une géométrie, euclidienne, simplifiée à l'excès et pas du tout microcosmique. La science d'aujourd'hui est celle d'une géométrie extrêmement générale pouvant se raccorder avec l'idée du quantum. Peut-être pourra-t-on employer des ds^2 à coefficients quantifiés qui donneront, dans un avenir prochain des aspects fantastiques à la notion de mesure. Il faut aussi reconnaître franchement que le temps est quantifiable, qu'il a d'ailleurs toujours été quantifié par les horloges et autres instruments analogues, que l'atome est un univers définissant intérieurement son espace et son temps.... Sa géométrie doit être non seulement non-euclidienne mais encore non archimédienne. Arrêtons-nous. Les suggestions de MM. Coppel, Fournier, Yovanovitch, si sensées, si parfaitement claires, si aptes à réunir les physiques macrocosmique et microcosmique, en montrant nettement ce qui les sépare, ces suggestions, dis-je, constituent un exposé d'une valeur de tout premier ordre quant à la manière d'orienter actuellement la véritable pensée scientifique.

A. BUHL (Toulouse).

F. KLEIN. — **Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie.** Neu bearbeitet von W. ROSEMAN. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd XXVI). — Un vol. in-8 de 326 pages, avec 237 figures; broché RM. 18; relié, RM. 19.50; Julius Springer, Berlin 1928.

Les leçons de géométrie non-euclidienne, professées par Félix Klein en

1892-93, ont paru tout d'abord sous la forme d'un cours autographié d'après les notes rédigées par M. Fr. Schilling. A la suite des nombreux progrès réalisés dans ce domaine depuis cette époque, il y avait lieu de remanier entièrement le plan général et de compléter l'exposé. Un an avant sa mort, le savant professeur de Goettingue a encore pu entreprendre ce travail en collaboration avec un jeune géomètre, M. Rosemann, qui s'est chargé de la rédaction définitive.

La première partie de l'ouvrage traite des concepts fondamentaux de la géométrie projective. Après avoir examiné les différents systèmes de coordonnées, les notions de substitutions et de groupes, les transformations homographiques, les propriétés projectives des formes du second ordre, l'auteur présente, dans la seconde partie, une étude approfondie de la détermination métrique dans le domaine euclidien, puis dans le domaine projectif. Cette méthode lui permet de mettre en lumière les propriétés fondamentales des géométries elliptique, euclidienne et hyperbolique.

Ce n'est que dans la troisième partie que l'auteur aborde la question au point de vue historique. Après avoir rappelé les principaux essais de démonstration de l'axiome des parallèles, il montre quelle a été l'influence considérable des travaux des grands géomètres du début du 19^e siècle, Gauss, Lobatchefski, J. Bolyai, poursuivis ensuite par Beltrami, Riemann, Cayley, Poincaré, etc. On sait que Klein lui-même a fourni d'importantes contributions. C'est ce qui lui a permis de faire ressortir, avec tant de clarté, les liens de la géométrie non-euclidienne avec les domaines les plus divers des mathématiques.

H. FEHR.

F. ENRIQUES. — L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque.

Point, ligne, surface. (Questions relatives aux mathématiques élémentaires, Fasc. I). Traduit sur la troisième édition italienne par M. SOLOVINE.
— Un vol. in-8 de 48 pages, Fr. 12; Gauthier-Villars et C^{ie}, Paris 1927.

On a souvent insisté sur les lacunes que présente l'enseignement supérieur pour ce qui est de la préparation des maîtres de l'enseignement secondaire. A la suite de l'initiative prise autrefois par Félix KLEIN, on trouve aujourd'hui, dans bon nombre d'universités, des cours ou séminaires sur les mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur. Ils ont donné lieu à d'intéressants ouvrages au nombre desquels figure le recueil publié par M. Enriques sous le titre *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1^{re} édit., Bologne 1900; traduction allemande, chez B. G. Teubner, 2 vol., 1907-10). Complétée au cours des trois éditions italiennes, cette importante collection va paraître en français sous le titre *Questions relatives aux mathématiques élémentaires*, réunies et coordonnées par F. Enriques, professeur à l'Université de Rome.

Dans le premier fascicule qui vient de sortir de presse, M. Enriques étudie l'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque. Sans entrer dans des développements inutiles pour les lecteurs auxquels il destine son ouvrage, l'auteur se limite aux questions qui sont d'un intérêt fondamental au point de vue philosophique, historique ou pédagogique. Nous reproduisons ci-après la liste des objets traités: I. Les « Éléments » d'Euclide. — II. Les origines de la Géométrie grecque: source pour sa reconstruction historique. — III. L'apport de la civilisation égyptienne et

orientale. — IV. L'ordre des principales découvertes. — V. Les concepts fondamentaux de la géométrie pythagoricienne. — VI. La critique des Eléates. — VII. Origines de l'Analyse infinitésimale: la quadrature du cercle et Hippocrate de Chios. — VIII. Développement de l'Analyse infinitésimale de Démocrite à Archimède. — IX. Le concept de la ligne et la polémique antimathématique des sophistes. — X. Les définitions du point, de la ligne et de la surface chez les Géomètres du IV^e siècle avant J.-C. — XI. Sur l'ordre logique de la science grecque: définitions, axiomes et postulats. — XII. Les critères de la logique moderne. — XIII. Les principes de la géométrie et l'intuition. — XIV. Les concepts de point, de ligne et de surface devant la critique moderne.

H. F.

W. LIETZMANN. — **Ueberblick über die Geschichte der Elementarmathematik.** Zweite Aufl. (W. Lietzmann, Math. Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 1). — 1 vol. in-8 de 80 pages avec 65 fig.; cartonné, RM. 2.

W. LIETZMANN. — **Aus der Mathematik der Alten,** Quellen zur Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie und zu ihren Anwendungen. (W. Lietzmann, Math. Unterrichtswerk, Ergänzungsheft 4). — 1 vol. in-8 de 65 pages avec 27 fig.; RM. 1,80; B. G. Teubner, Leipzig.

On rappelle souvent — dans quelques pays cela est même prévu dans les programmes — qu'il y a lieu de compléter parfois les leçons par des indications d'ordre historique. Mais encore faut-il savoir faire un choix judicieux et présenter la chose sous une forme captivante.

C'est ce que fait précisément avec succès M. Lietzmann dans ces deux fascicules qui forment un heureux complément à sa collection de manuels destinés à l'enseignement secondaire allemand. Richement illustrés de portraits de mathématiciens et de nombreuses figures, ils présentent aux élèves un aperçu du développement historique des différentes branches des mathématiques élémentaires, accompagné de nombreux extraits empruntés aux grands auteurs classiques.

H. F.

K. FLADT. — **Elementarmathematik.** Bd. I: *Elementargeometrie*. 2. Teil: Der Stoff bis zur Untersekunda (Planimetrie und Stereometrie). — 1 vol. in-8 de 181 pages avec 134 figures dans le texte, RM. 8.

K. FLADT. — **Quellenhefte zur Elementargeometrie**, 1. Heft: Der Stoff bis zur Untersekunda. — 1 fasc. in-8 de 73 p. avec 62 fig. et deux reproductions; RM. 2; B.G. Teubner, Leipzig.

C'est aux maîtres de mathématiques des établissements secondaires et aux candidats à l'enseignement que s'adresse l'ouvrage *Elementarmathematik*, publié sous la direction de M. Cuno Fladt. Les auteurs se proposent d'examiner, au point de vue didactique, les principales connaissances mathématiques qu'il est utile de fournir aux élèves de ces établissements en se plaçant au point de vue des besoins actuels. Depuis une vingtaine d'années, les programmes ont évolué. On tend à remplacer certains chapitres, conservés souvent par routine, par des chapitres nouveaux en rapport

avec les tendances modernes. Un soin tout particulier sera donné aux indications d'ordre historique.

L'ouvrage comprendra trois parties: I. Géométrie. — II. Arithmétique et Algèbre. — III. Les applications des mathématiques élémentaires. La partie historique sera traitée dans des suppléments intitulés « Quellenhefte » (Sources historiques), comprenant la reproduction de quelques pages classiques relatives aux grandes découvertes mathématiques.

Dans le présent fascicule I, 2, M. Fladt passe en revue les objets qui constituent le programme de la géométrie du plan et de l'espace, tandis que, dans le supplément, il présente un choix très intéressant d'extraits des œuvres des grands géomètres.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Tous les ouvrages adressés à la Rédaction sont signalés ici avec une brève indication de leur contenu, sans préjudice de l'analyse dont ils peuvent être ultérieurement l'objet sous la rubrique « Bibliographie ».

Index generalis. Annuaire général des Universités. Année 1927-1928. Publié sous la direction de R. DE MONTESSUS DE BALLORE. — 1 vol. in-16° relié, de 2286 p., fr. 225; Editions Spès, 17, rue Soufflot, Paris.

Nous avons eu l'occasion de signaler régulièrement cet important recueil qui paraît tous les ans depuis 1919. La première partie (environ 900 pages) concerne les universités et écoles supérieures du monde entier: les cours professés et les noms des professeurs sont indiqués dans tous les détails. La seconde partie se rapporte aux observatoires, aux bibliothèques, aux instituts scientifiques, aux grandes académies, aux sociétés savantes des divers pays civilisés. Les 6500 notices de l'*Index generalis* sont écrites dans les langues mêmes des pays qu'elles concernent, sauf que les langues peu usuelles ont été remplacées par le français.

Des tables très complètes dont la Table alphabétique des 60.000 personnalités scientifiques et littéraires citées dans le volume, terminent l'*Index generalis*.

F. BAUR. — **Korrelationsrechnung.** (Math.-Phys. Bibl. Bd. 75.) — 1 vol. in-16° de 57 p. avec 3 figures, cartonné, Mk. 1.20, B. G. Teubner, Leipzig, 1928.

La théorie de la corrélation est utilisée dans les applications les plus diverses de la statistique. Le but de ce petit volume est de donner une première initiation n'exigeant que la connaissance des mathématiques élémentaires.