

**E. Cartan. — Leçons sur la Géométrie des  
Espaces de Riemann (Cahiers scientifiques  
publiés sous la direction de M. Gaston Julia.  
Fascicule II). — Un vol. gr. in-8° de vi-274 pages  
et 34 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et  
Cie. Paris, 1928.**

Autor(en): **Buhl, A.**

Objektyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **29.06.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

notamment à la notion de caractéristique. L'équation en litige est surtout maniable lorsqu'elle est linéaire en  $r, s, t$  mais ce cas, outre qu'il est le plus important au point de vue physique suffit à diriger l'analyse dans des voies nouvelles. M. Emile Picard considère ici quatre problèmes fondamentaux : intégrale passant par deux caractéristiques, intégrale et dérivée partielle données sur une courbe, intégrale donnée sur une caractéristique et sur une courbe quelconque, intégrale donnée sur deux courbes quelconques. Des distinctions s'imposent tout de suite quant à l'analyticité des données et des solutions, les équations hyperboliques, où les termes du second ordre sont réduits à  $s$ , se prêtant d'ailleurs naturellement à des discussions basées sur la classification indiquée. C'est peu après qu'intervient l'importante notion d'équation adjointe. Le troisième problème conduit à une équation intégrale dite « de Volterra ». La méthode des approximations successives, créée par M. Picard, s'impose encore dans ces questions notamment à propos du quatrième problème. L'équation des cordes vibrantes, celle des télégraphistes font naître des intégrales, périodiques dans le temps et l'espace, qui, chose curieuse et presque paradoxale, sont étrangères à la nature physique du problème (p. 172).

Les travaux de Poincaré sur l'équation des télégraphistes nous font revenir à l'inversion des intégrales définies, au problème d'Abel et à ses généralisations.

La grande question qui va terminer ces brillantes leçons est celle des équations

$$\Delta u + ap + bq + cu = 0 .$$

Pour  $a, b, c$  nuls on a l'équation de Laplace, pour  $a, b$  nuls celle de Poisson. Ici la matière est beaucoup plus analytique que dans les cas hyperboliques. Les problèmes relatifs à la dérivée normale sont particulièrement délicats. La Théorie des surfaces est impliquée dans toutes ces considérations avec l'équation  $s = \sin z$  qui correspond aux surfaces à courbure totale constante (p. 205).

La vingt-troisième et dernière leçon a trait au potentiel sphérique de M. Boussinesq qui satisfait à l'équation de D'Alembert concernant la propagation par ondes. Un tel livre — vraiment c'est plus qu'un cahier — ne peut être qu'un inestimable trésor pour ceux qui n'ont point entendu la parole du Maître. Je crois même que beaucoup de ceux qui l'ont entendue réétudieront avec plaisir ces pages si riches quant à la structure de la Science faite, si pleines de suggestions quant aux progrès de celle qui est à faire.

A. BUHL (Toulouse).

E. CARTAN. — **Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann** (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule II). — Un vol. gr. in-8° de vi-274 pages et 34 figures. Prix: 40 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>. Paris, 1928.

M. Elie Cartan, à qui on doit tant et tant de travaux de Géométrie, révèle peut-être ici, d'une manière particulièrement nette, le successeur de Gaston Darboux dans la chaire de Géométrie supérieure de la Sorbonne. En effet, on peut dire, en gros, qu'un espace de Riemann à *deux* dimensions n'est rien d'autre qu'une surface ordinaire définissable en elle-même et

en ses déformations par un certain  $ds^2$  à deux variables. C'est là ce qu'il s'agit de généraliser pour  $n$  variables. On sait que, pour  $n$  quelconque, il y a une courbure riemannienne qui ne dépend que du  $ds^2$  et que c'est là aussi la base fondamentale des développements einsteiniens.

M. Cartan a eu recours à un point de départ fort élémentaire. Il considère les vecteurs de l'espace euclidien, passe aux bivecteurs, aux trivecteurs, ... et atteint ainsi la notion générale de tenseur. Du  $ds^1$  on passe au  $dM = e_i du^i$  puis au

$$de_i = c_k \omega_i^k = \Gamma_{ir}^k e_k du^r,$$

d'où les symboles de Christoffel qui peuvent immédiatement être liés à la forme lagrangienne des équations de la dynamique. Le  $ds^2$  et la force vive sont des bases à rôles analogues. Quant aux conditions pour qu'un  $ds^2$  soit euclidien, elles s'expriment par la nullité de symboles de Riemann à quatre indices, symboles naissant ici d'une simple permutabilité de dérivées partielles ordinaires. Sauf quand il est dit *normal*, l'espace de Riemann euclidien n'est pas forcément identique à l'espace euclidien; toutefois il admet une représentation polyédrale de nature euclidienne. Les différentes *faces* qui interviennent ainsi peuvent correspondre de la manière la plus élégante à de très importantes notions analytiques, aux feuilletts d'une surface de Riemann, aux modules de périodicité des intégrales de fonctions algébriques, ...; à coup sûr « surface de Riemann » et « espace de Riemann » sont des expressions qui auraient pu sembler appartenir à des régions bien différentes de la Science mais les créateurs de génie, comme on l'a souvent remarqué, semblent, tôt ou tard, avoir bâti les choses les plus diverses sur un fonds commun.

Les espaces euclidiens tangents ou osculateurs aux espaces de Riemann sont encore des extensions simples de concepts élémentaires; la tangence correspond, par exemple, au plan tangent d'une surface ordinaire. Aussi la courbure et la torsion géodésiques, les lignes conjuguées, ..., peuvent elles aisément trouver des généralisations. Mais la plus belle chose que l'on puisse définir ici, c'est le transport, par parallélisme généralisé, conçu par M. T. Levi-Civita. Les géodésiques ou *droites* des espaces de Riemann suivent naturellement, puis les surfaces totalement géodésiques ou *plans*. La considération de ces dernières est nécessaire quant aux notions générales de déplacement et de libre mobilité; celle-ci peut jouer partout si elle joue autour de deux points (Schur).

Avant d'étudier la courbure riemannienne de manière aussi générale que possible, M. Cartan a consacré un chapitre du plus haut intérêt aux espaces à courbure constante les plus simples, à ceux qui donnent les géométries non-euclidiennes. On peut faire cela d'une manière purement analytique ou presque, en invoquant les groupes de substitutions linéaires. Ici, c'est le point de vue le plus géométrique qui domine; la géométrie elliptique de Cayley-Klein correspond aisément à la géométrie sphérique mais il en est de même pour la géométrie hyperbolique avec le secours de cônes de révolution passant par l'absolu. Les représentations conformes de Poincaré peuvent rendre des services analogues. Et il y a des espaces de Riemann localement sphériques ou hyperboliques de même qu'il y en a de localement euclidiens, d'euclidiens à des questions de topologie près.

La courbure riemannienne est associée aux cycles infiniment petits; elle conduit au tenseur de Riemann-Christoffel déjà rencontré dans des cas de

nullité. Sur les surfaces ordinaires, elle devient la simple courbure totale attachée aux rayons de courbure principaux, à l'indicatrice, etc. Il s'ensuit que, dans les espaces de Riemann à trois dimensions, il y a des quadriques indicatrices. A ceci se rattache un théorème d'une curieuse exclusivité qui veut que l'espace euclidien soit le seul admettant un système triple orthogonal formé de surfaces totalement géodésiques. Peut être y a-t-il là la dernière et très forte position que tient encore l'espace euclidien devant les autres espaces qui lui font concurrence pour des raisons nettement physiques.

Les Identités de Bianchi représentent sans doute la suprême élégance qui est au fond de toutes ces questions. Sans elles, pas de Théories d'Einstein de même que sans Identité de Poisson il n'y aurait pas d'équations et de propriétés canoniques.

Les coordonnées normales de Riemann permettent de rayonner autour d'un point par arcs de géodésiques et dans des conditions d'approximation qui assurent l'étude du voisinage à des infiniment petits près dont l'ordre est aisément assignable; il y a là une sorte d'étude locale de l'équation différentielle des géodésiques. De telles questions ne vont pas sans certains scrupules de rigueur auxquels M. Cartan a consacré trois Notes placées en fin de l'ouvrage. La possibilité de la représentation géodésique sur l'espace ordinaire est notamment liée à l'étude des conditions initiales associables aux équations différentielles des géodésiques. La courbure riemannienne est une grandeur superficielle, bivectorielle; elle peut devenir linéaire, simplement vectorielle sur de certaines surfaces de discontinuité traversant le domaine riemannien. C'est là une remarque assez inattendue et très importante.

Enfin, dans les espaces normaux à courbure riemannienne négative ou nulle et quant à leurs représentations sur l'espace euclidien, on peut mettre en évidence de curieuses inégalités concernant les  $ds^2$  et même certaines distances finies. Avec les espaces de recouvrement et l'homéomorphie, l'*analysis situs* apparaît à nouveau; cette dernière partie de la science mathématique peut d'ailleurs exiger à elle seule une théorie des espaces de Riemann. Ne remonte-t-elle pas à Riemann lui-même? Il y a, en tout ceci, de merveilleuses liaisons qui, avec le talent habituel de M. Cartan, sont mises en lumière de façon fort esthétique et avec un grand souci de simplicité géométrique.

A. BUHL (Toulouse).

Bertrand GAMBIEP. — **Déformation des surfaces étudiées du point de vue infinitésimal** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXVI). — Un fascicule gr. in-8° de 60 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et C<sup>ie</sup>, Paris, 1927.

Le beau fascicule de M. Bertrand Gambier donne le frisson quand on se prend à songer aux  $ds^2$  à  $n$  variables après avoir considéré les difficultés qui apparaissent déjà lorsque  $n$  est égal à 2. Cependant ce dernier cas est le plus souple, le plus vraiment géométrique; sa richesse particulière est la plus belle des préfaces quant à l'étude générale des  $ds^2$ . Ici le

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$