est immédiatement accompagné des invariants de Gauss (qui contiennent E, F, G et leurs dérivées en u, v), de Minding (en lesquels u et v sont liés), de Beltrami (qui symétrisent, de manière fondamentale, les coefficients transformés E', F', G'). La symétrie ne va pas sans les symboles de Christoffel que Gaston Darboux a presque toujours évités systématiquement. C'est d'abord par la considération des invariants ou, en gros, par la comparaison des *courbures* qu'on voit si des surfaces à ds^2 et à ds'^2 données sont applicables. Mais ceci n'est qu'un hors-d'œuvre. Le premier grand problème est de trouver toutes les surfaces correspondant à un ds^2 donné ; on lui fait correspondre un système aux dérivées partielles, mélange éclectique de formules de Gauss, Codazzi, Darboux, par un raisonnement préliminaire, d'une extrême élégance, qui institue sur une surface des formules analogues à celles de Frenet. Gaston Darboux, pour obtenir l'équation de Monge-Ampère de la déformation, écrivait, avec le ds^2 ci-dessus,

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2$$

puis exprimait que la courbure du second membre était nulle comme, évidemment, celle du premier. Rarement, à coup sûr, des questions aux développements immenses furent amorcées aussi simplement.

Le rôle des asymptotiques est aussi des plus curieux dans le problème de la déformation ; de telles lignes peuvent rester *rigides*. Weingarten, Darboux ont incontestablement donné des résultats fondamentaux et d'une grande perfection mais non liés. M. Goursat les a réunis par une transformation de Bäcklund. MM. Gau et Gosse ont repris les choses dans un grand esprit de rigueur ; ils ont mis en évidence, ainsi que M. Bertrand Gambier lui-même, le pourquoi des réussites. L'exposé pénétrant de ce dernier nous le fait merveilleusement comprendre.

A. Buhl (Toulouse).

P. Appell. — **Le problème géométrique des déblais et remblais** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat ; fasc. XXVII). — Un fascicule gr. in-8° de 36 pages. Prix : 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928.

Si l'éminent auteur de ce fascicule n'avait déjà eu maintes occasions de bien faire connaître le sujet, nous pourrions peut-être commencer par dire que celui-ci, malgré la première apparence, n'est pas relatif à de véritables questions de terrassement. L'art de l'ingénieur est ici très idéalisé : il prête un langage commode à un problème posé par Monge, à propos de volumes, mais qu'on peut finalement rattacher à la géométrie des masses. Le déblai et le remblai sont des masses matérielles équivalentes. On propose de les diviser en éléments correspondants, de même masse, de telle façon que la somme des produits obtenus en multipliant la masse d'un élément du déblai par sa distance à l'élément correspondant du remblai soit un minimum. Pratiquement c'est bien là, si l'on veut, la recherche d'un mode de transport aussi avantageux que possible ; théoriquement, c'est un problème qui relève du Calcul des variations et renferme, en germe, les aperçus géométriques les plus ingénieux et les plus inattendus. Tout d'abord, déblai et remblai n'ont trois dimensions que dans le cas le plus complexe ; ce peuvent être des lignes, puis des surfaces, voire des systèmes ponctuels discontinus d'où l'on passera aux cas continus par d'habiles passages à la limite. Déjà, dans le cas discontinu, on aperçoit l'un des principes fondamentaux de Monge, celui qui rend les routes normales à une surface. C'est l'ouverture sur une belle théorie des congruences. Le cas des déblais et remblais superficiels conduit à des surfaces telles qu'un point donné se projette sur chaque normale au milieu du segment formé par les centres de courbure principaux. Les termes de *congruences*, *surfaces de M. Appell* ont même été consacrés par l'usage. Ces dernières surfaces admettent une théorie analogue à celle des surfaces minima, bien que plus élevée. Les extrémités des routes en déblais et remblais superficiels, peuvent y engendrer des courbes dites *séparatrices* par Dupin.

Un des aspects curieux du sujet est que de grands géomètres, comme Monge et Dupin, ont donné des résultats élégants et exacts au moyen de raisonnements mauvais et même faux.

M. Appell a rétabli partout la rigueur en accentuant encore la note élégante, ce dont il n'y a pas lieu de s'étonner, tant la manière est dans les habitudes de ce grand esprit.

A. Buhl (Toulouse).

Emile Cotton. — **Approximations successives et équations différentielles** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXVIII). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1928.

Cet exposé a trait aux théorèmes d'existence concernant les équations différentielles ordinaires. Il s'agit naturellement des travaux fondamentaux de Cauchy-Lipschitz mais, à la clarté des méthodes d'approximations successives dues à M. Emile Picard, on peut remplacer les équations différentielles initiales par des équations intégrales. Dès lors, le point de vue s'élargit et l'on se trouve finalement en présence de méthodes propres à établir l'existence de solutions, à la fois, pour les équations différentielles et pour les équations intégrales, ces dernières pouvant d'ailleurs appartenir au type de Fredholm ou au type de Volterra.

Une grande importance est donnée aux systèmes linéaires, homogènes puis pourvus de seconds membres; le cas des systèmes dépendant de paramètres arbitraires donne aussi lieu à d'importantes généralités. Les solutions asymptotiques à une solution particulière, c'est-à-dire s'en rapprochant indéfiniment, quand la variable devient infinie, sont profondément étudiées d'après Poincaré, Liapounoff, Bohl. Et, de fait, si connaître une solution particulière, d'une équation ou d'un système d'équations différentielles, ne sert guère, en général, pour faire des constructions plus étendues par méthodes exactes, il y a, au contraire, de nombreuses méthodes approchées à développer autour d'une solution *noyau*, ce dernier mot n'étant pas écrit au hasard et venant rappeler les noyaux des équations intégrales.

M. Emile Picard, dans son *Traité d'Analyse*, a beaucoup approfondi le cas de l'équation du second ordre dont une courbe intégrale, au lieu d'être assujettie à passer par un point avec une direction déterminée, est assujettie à passer par deux points. Ici la question est dominée par les équations intégrales, à limites fixes, qui peuvent d'ailleurs conduire à des généralisations construites directement par M. Picard.