Préliminaires et notations.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

du facteur normant laisse d'ailleurs un certain arbitraire, et l'on est amené à normer de façons différentes la forme ϖ d'une équation $\varpi = 0$ dans les divers problèmes où cette forme intervient.

La conservation simultanée de deux équations $\varpi_1 = 0$, $\varpi_2 = 0$ est équivalente — au point de vue des transformations infinitésimales — à celle d'une équation quadratique $\chi = 0$; ces deux cas sont traités à partir du n° 25, et à la forme quadratique χ correspond encore un facteur normant convenable pour ce cas.

Un cas particulier est enfin indiqué (n° 29), celui où l'on veut conserver une équation $\varpi = 0$ et une forme quadratique $\chi_0 = 2M_0\, du\, dv$, cas intéressant pour les applications géométriques et la simplificité des invariants qu'il met en évidence. C'est aussi en vue des applications géométriques que nous avons montré qu'au problème des équivalences (Σ) pouvait se ramener celui d'équivalences pour les transformations où le rôle des variables u et v serait échangé.

Préliminaires et notations.

3. — Les problèmes d'équivalence qui vont suivre se rapportent à des formes ou des équations différentielles, respectivement en u, v et $\bar{u}$, $\bar{v}$, vis-à-vis de certains changements de variables. A côté des transformations générales Π, données par les formules

$$\bar{u} = U(u, v) \qquad \bar{v} = V(u, v) \qquad (\Pi)$$

nous considérerons les transformations à variables séparées

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = V(v) \qquad (\Sigma)$$

et quand rien d'autre ne sera précisé, les équivalences et les invariants se rapporteront à ces transformations Σ, qui forment un groupe (continu et infini) ; les transformations Σ sont des produits $\Sigma_1\Sigma_2$ ou $\Sigma_2\Sigma_1$ de transformations particulières

$$\bar{u} = U(u) \qquad \bar{v} = v \qquad (\Sigma_1)$$

$$\bar{u} = u \qquad \bar{v} = V(v)\,. \qquad (\Sigma_2)$$

Nous dirons un mot du problème d'équivalence pour les transformations Σ_i

$$\bar{u} = \mathrm{U}(v) \qquad \bar{v} = \mathrm{V}(u) \qquad (\Sigma_i)$$

mais celles-ci ne forment pas un groupe quand les variables de même nom (u, $\bar{u}$, ...; v, $\bar{v}$, ...) jouent un rôle analogue. Cependant ces transformations Σ_i forment avec les transformations Σ un groupe mixte de transformations Σ_g, dont nous parlerons aussi. On pourrait faire pour les transformations Σ_i une décomposition analogue à celle faite pour les transformations Σ, mais nous déduirons les résultats relatifs aux premières de ceux obtenus pour les autres par une modification de notations, échangeant le rôle des variables u, v, et qui revient à l'emploi de la transformation Σ_i particulière

$$\bar{u} = v \qquad \bar{v} = u\,. \qquad (\Sigma_0)$$

Quand des équations différentielles seront équivalentes pour certaines des transformations précédentes, cette équivalence pourra être étendue à leurs intégrales. Nous supposerons analytiques quand il en sera besoin, et tout au moins pourvues des dérivées nécessaires dans les domaines de variation considérés, toutes les fonctions employées, vis-à-vis de toutes les variables dont elles dépendent.

4. — Pour abréger l'écriture, nous poserons

$$f_{ij} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \partial v^j} \qquad \bar{f}_{(ij)} = \frac{\partial^{i+j} \bar{f}}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{v}^j}$$

pour les fonctions f de u et v, $\bar{f}$ de $\bar{u}$ et $\bar{v}$ (les fonctions de ces dernières variables étant en général surlignées); quand il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous aurons recours aux accents pour indiquer les dérivées des fonctions d'une seule variable par rapport à celle-ci, ainsi

$$\mathrm{U}' = \frac{d\mathrm{U}(u)}{du} \qquad \mathrm{V}' = \frac{d\mathrm{V}(v)}{dv}\,.$$

Quand nous utiliserons, suivant la méthode de Lie, la transformation infinitésimale d'un groupe, nous écrirons

$$\vartheta u = -\xi(u, v)\,.\,\vartheta t \qquad \vartheta v = -\eta(u, v)\,.\,\vartheta t$$

ϑt étant l'accroissement infinitésimal d'une variable indépendante t, puis nous poserons $\delta = \frac{\vartheta}{\vartheta t}$, d'où

$$\delta u = -\xi(u, v) = -\xi \qquad \delta v = -\eta(u, v) = -\eta \tag{1}$$

et pour une fonction f de u, v

$$\delta f = f_{10}\delta u + f_{01}\delta v = -f_{10}\xi - f_{01}\eta .$$

En prolongeant un groupe et sa transformation infinitésimale, on aura

$$\delta du = d\delta u = -\xi_{10}\,du - \xi_{01}\,dv \qquad \delta dv = d\delta v = -\eta_{10}\,du - \eta_{01}\,dv$$
$$\delta(df - f_{10}\,du - f_{01}\,dv) = 0$$

d'où, pour les dérivées partielles de f

$$\delta f_{10} = f_{10}\xi_{10} + f_{01}\eta_{10} + \frac{d}{du}\delta f \qquad \delta f_{01} = f_{10}\xi_{01} + f_{01}\eta_{01} + \frac{d}{dv}\delta f \tag{2}$$

Pour les transformations Σ, on aura

$$\xi = \xi(u) \qquad \eta = \eta(v) \tag{1'}$$
$$\xi_{10} = \xi' \qquad \eta_{01} = \eta' \qquad \xi_{01} = \eta_{10} = 0$$

et les formules (2) se réduiront à

$$\delta f_{10} = f_{10}\xi' + \frac{d}{du}\delta f \qquad \delta f_{01} = f_{01}\eta' + \frac{d}{dv}\delta f . \tag{2'}$$

5. — *Principe de la méthode de Lie.* — Partons des transformations Σ, c'est-à-dire des formules (1) et (1′), et prolongeons la transformation infinitésimale afin d'obtenir les variations des coefficients des formes ou des équations à conserver; nous obtenons ainsi k nouvelles équations qui, avec les deux équations (1), définissent le groupe prolongé opérant sur u, v et les coefficients en question, adjoints à ces variables. Les invariants à former sont les invariants différentiels du groupe précédent; jusqu'à un ordre n (inclus), ils sont définis comme fonctions de u, v, des coefficients adjoints et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, invariantes pour la transformation infinitésimale de ce groupe prolongé par différentiation jusqu'à l'ordre n; les invariants distincts (c'est-à-dire fonctionellement distincts par rapport à

toutes ces variables) sont les solutions indépendantes d'un système complet d'équations linéaires aux dérivées partielles. Ces équations, indépendantes dans le cas général, sont obtenues en annulant les coefficients des arbitraires ξ, η, ξ', η', ... dans la variation δf d'une fonction de toutes les variables introduites (nous gardons le symbole δ pour les transformations prolongées). Il ne sera pas nécessaire d'écrire les équations de ce système, mais seulement de connaître le nombre des solutions; en opérant sur les équations des caractéristiques du système, on sera ramené à former les combinaisons $\delta f = 0$ par élimination de $\xi, \eta, \xi', \eta', \ldots$ entre les équations donnant les variations de u, v, des coefficients, et de leurs dérivées.

On remarque qu'en dehors des constantes, aucune fonction de u, v seuls n'est invariante; on pourra donc faire abstraction de u et v au nombre des variables indépendantes en ne comptant pas plus, dans la suite, les équations $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ à satisfaire par tout invariant; autrement dit, on n'utilisera pas directement les équations (1).

Dans ces conditions, on obtient en général, jusqu'à l'ordre n [1], un système de $2(n+1)$ équations à $k\,\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ inconnues et ceci laisse prévoir l'existence de $\frac{n+1}{2}\,[k(n+2)-4]$ invariants jusqu'à l'ordre n inclus, dont $k(n+1)-2$ pour cet ordre.

Nous rencontrerons aussi des équations invariantes: dans une première étude, nous laisserons de côté tous les cas particuliers.

Conservation d'une forme de Pfaff.

6. — *Invariants et paramètres différentiels du cas général.* — Soit la forme de Pfaff

$$\varpi \equiv A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv \tag{3}$$

à conserver par les transformations Σ; il faudra

$$\delta\varpi \equiv (\delta A - A\xi')\,du + (\delta B - B\eta')\,dv = 0$$
$$\delta A = A\xi' \qquad \delta B = B\eta' \tag{4}$$

[1] Comme il a été expliqué plus haut, l'ordre n que nous attribuons à un invariant est l'ordre de dérivation à partir des coefficients des formes ou équations différentielles qui interviennent (et nous ne traitons que des formes et équations du premier ordre).