Cas de deux formes de Pfaff.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1928)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Cas de deux formes de Pfaff.

14. — Soient les deux formes de Pfaff

$$\varpi_1 \equiv A_1\,du + B_1\,dv \qquad \varpi_2 \equiv A_2\,du + B_2\,dv \tag{24}$$

à conserver simultanément; nous nous en tiendrons au cas général[1]. Avec des notations analogues à celles du n° 6, on partira des conditions

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \\ \delta a_2 = \xi' & \delta b_2 = \eta' \end{array}\right. \tag{25}$$

et l'on pourra prévoir $2(n+1)^2$ invariants jusqu'à l'ordre n, et $2(2n+1)$ de cet ordre. Un premier procédé consistera à remplacer les équations (25) par

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta(a_1 - a_2) = 0 & \delta(b_1 - b_2) = 0 \\ \delta a_1 = \xi' & \delta b_1 = \eta' \end{array}\right. \tag*{[II, 0]}$$

d'où les deux invariants d'ordre zéro

$$\varepsilon = e^{a_1 - a_2} \qquad \zeta = e^{b_1 - b_2}$$

puis, par différentiation

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta a_{1,10} = a_{1,10}\xi' + \xi'' & \delta b_{1,01} = b_{1,01}\eta' + \eta' \\ \delta b_{1,10} = b_{1,10}\xi' & \delta a_{1,01} = a_{1,01}\eta' \\ \delta\varepsilon_{10} = \varepsilon_{10}\xi' & \delta\varepsilon_{01} = \varepsilon_{01}\eta' \\ \delta\zeta_{10} = \zeta_{10}\xi' & \delta\zeta_{01} = \zeta_{01}\eta' \end{array}\right. \tag*{[II, 1]}$$

donnant les invariants du premier ordre

$$\alpha_1 = b_{1,10}e^{-a_1} \quad \beta_1 = a_{1,01}e^{-b_1} \quad \varepsilon_{10}e^{-a_1},\ \zeta_{10}e^{-a_1},\ \varepsilon_{01}e^{-b_1},\ \zeta_{01}e^{-b}$$

par l'emploi des paramètres différentiels $f_{10}\,e^{-a_1}$ et $f_{01}\,e^{-b_1}$, qui permettent de continuer les calculs comme précédemment à partir des invariants essentiels ε, ζ, α, β. Nous retrouverons ainsi

---

[1] Le cas particulier $B_1 = 0$, $A_2 = 0$ se ramène, comme il a été indiqué au n° 13, à celui d'une seule forme générale ϖ.

les invariants $\alpha_1, \beta_1, \omega_1, \theta_1, \varphi_1, \psi_1, \ldots$ de la forme ϖ_1, puis, à côté d'eux, la suite d'invariants analogues $\alpha_2, \beta_2, \omega_2, \ldots$ de ϖ_2; en effet, l'on a par exemple

$$e^{-a_2} = \varepsilon e^{-a_1} \qquad b_2 = b_1 - \log \zeta \qquad b_{2,10} = b_{1,10} - \frac{\zeta_{10}}{\zeta}$$

$$\alpha_2 = b_{2,10} e^{-a_2} = \varepsilon \left(\alpha_1 - \frac{\zeta_{10}}{\zeta} e^{-a_1} \right)$$

En outre, il restera une suite d'invariants mixtes entre les deux formes ϖ_1 et ϖ_2, en nombre $2(n+1)$ jusqu'à l'ordre n, commençant par

$$\varepsilon \qquad \zeta \qquad \varepsilon_{10} e^{-\frac{a_1 + a_2}{2}} \qquad \zeta_{01} e^{-\frac{b_1 + b_2}{2}} \quad \ldots$$

Les conditions suffisantes d'équivalence seraient celles relatives à ϖ_1, auxquelles on ajouterait les conditions $\delta\varepsilon = \delta\zeta = 0$.

15. — Un procédé un peu plus symétrique consisterait à poser

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = a \qquad \frac{b_1 + b_2}{2} = b \qquad \frac{a_1 - a_2}{2} = \ddot{a} \qquad \frac{b_1 - b_2}{2} = \ddot{b}$$

et écrire les équations (25) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} \delta \ddot{a} = 0 & \delta \ddot{b} = 0 \\ \delta a = \xi' & \delta b = \eta' \end{array} \right. \qquad [\text{II}', 0]$$

Après les invariants d'ordre zéro, $\ddot{a}$ et $\ddot{b}$, on trouverait ainsi pour le premier ordre

$$\alpha = b_{10} e^{-a} \qquad \beta = a_{01} e^{-b} \qquad \ddot{a}_{10} e^{-a}, \; \ddot{b}_{10} e^{-a}, \; \ddot{a}_{01} e^{-b}, \; \ddot{b}_{01} e^{-b}$$

et l'on continuerait de même, les paramètres différentiels se rapportant à une forme $\varpi \equiv \sqrt{A_1 A_2}\, du + \sqrt{B_1 B_2}\, dv$, qui n'est pas du faisceau linéaire de ϖ_1 et ϖ_2; on remarquera aussi l'introduction d'invariants irrationnels.

Les invariants essentiels sont $\ddot{a}$, $\ddot{b}$, α, β; quant aux *conditions suffisantes d'équivalence, elles se présentent ici sous une forme plus simple* que précédemment, étant données par

$$\delta \ddot{a} = \delta \ddot{b} = \delta(\ddot{a}_{10} e^{-a}) = \delta(\ddot{b}_{10} e^{-a}) = \delta(\ddot{a}_{01} e^{-b}) = \delta(\ddot{b}_{01} e^{-b}) = 0$$

c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au nº 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

Une forme quadratique.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv \mathrm{L}du^2 + 2\,\mathrm{M}du\,dv + \mathrm{N}dv^2 \qquad (26)$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients L, M, N sont astreints aux variations

$$\delta\mathrm{L} = 2\mathrm{L}\xi' \qquad \delta\mathrm{M} = \mathrm{M}(\xi' + \eta') \qquad \delta\mathrm{N} = 2\mathrm{N}\eta' \qquad (27)$$

Il y a à prévoir $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ invariants jusqu'à l'ordre n, dont $3n + 1$ nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en L, M, N des invariants relatifs: L et N sont (Σ_1) et (Σ_2) de poids (-2), M est (Σ) de poids (-1); si les équations $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\begin{array}{lll} \mathrm{L} = e^{2l} & \mathrm{M} = e^{m} & \mathrm{N} = e^{2n} \\ \delta l = \xi' & \delta m = \xi' + \eta' & \delta n = \eta' \end{array} \qquad [\mathrm{III},\ 0]$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{LN}} \qquad (28)$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta\mu = 0 \qquad [\mathrm{III},\ 0']$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{\begin{array}{ll} \delta l_{10} = l_{10}\xi' + \xi'' & \delta n_{01} = n_{01}\eta' + \eta'' \\ \delta n_{10} = n_{10}\xi' & \delta l_{01} = l_{01}\eta' \\ \delta\mu_{10} = \mu_{10}\xi' & \delta\mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{array}\right. \qquad [\mathrm{III},\ 1]$$