Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1928)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EQUIVALENCES DE FORMES ET D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES PAR LES TRANSFORMATIONS A VARIABLES SÉPARÉES

Autor: Delens, P. C.

Kapitel: forme quadratique.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-21879

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

c'est-à-dire par des *conditions moins nombreuses et d'ordre moins élevé* qu'au n° 14; cet exemple montre l'intérêt qu'il y a, dans chaque cas, à reprendre la discussion sur les données particulières au problème proposé.

Une forme quadratique.

16. — Imposons-nous maintenant la conservation de la forme

$$\chi \equiv L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2 \tag{26}$$

Nous indiquerons seulement les grandes lignes de la méthode, sans discuter les cas particuliers. Les coefficients L, M, N sont astreints aux variations

$$\delta L = 2L\xi' \qquad \delta M = M(\xi' + \eta') \qquad \delta N = 2N\eta' \tag{27}$$

Il y a à prévoir $\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$ invariants jusqu'à l'ordre n, dont $3n + 1$ nouveaux pour cet ordre. On reconnaît en L, M, N des invariants relatifs: L et N sont (Σ_1) et (Σ_2) de poids (-2), M est (Σ) de poids (-1); si les équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ne sont pas satisfaites, ils fourniront l'invariant d'ordre zéro. En posant

$$\begin{aligned} &L = e^{2l} \qquad M = e^{m} \qquad N = e^{2n} \\ &\delta l = \xi' \qquad \delta m = \xi' + \eta' \qquad \delta n = \eta' \end{aligned} \tag{III, 0}$$

nous prendrons pour invariant d'ordre zéro

$$\mu = e^{2(m-l-n)} = \frac{M^2}{LN} \tag{28}$$

et substituerons à la seconde équation [III, 0]

$$\delta\mu = 0 \tag{III, 0'}$$

Dès ce moment, les équations dérivées fourniront régulièrement les invariants

$$\left\{\begin{aligned} &\delta l_{10} = l_{10}\xi' + \xi'' \qquad && \delta n_{01} = n_{01}\eta' + \eta'' \\ &\delta n_{10} = n_{10}\xi' && \delta l_{01} = l_{01}\eta' \\ &\delta\mu_{10} = \mu_{10}\xi' && \delta\mu_{01} = \mu_{01}\eta' \end{aligned}\right. \tag{III, 1}$$

donnant pour le premier ordre

$$\lambda = n_{10} e^{-l} \quad \nu = l_{01} e^{-n} \quad \rho = \mu_{10} e^{-l} \quad \sigma = \mu_{01} e^{-n} \tag{29}$$

et mettant en évidence les paramètres différentiels [1]

$$\vartheta_u f = f_{10}\, e^{-l} \qquad \vartheta_v f = f_{01}\, e^{-n} \tag{30}$$

$$\lambda = \vartheta_u n \quad \nu = \vartheta_v l \quad \rho = \vartheta_u \mu \quad \sigma = \vartheta_v \mu$$

Pour continuer, on substituerait aux quatre dernières équations [III, 1]

$$\delta\lambda = 0 \qquad \delta\nu = 0 \qquad \delta\rho = 0 \qquad \delta\sigma = 0 \qquad [\text{III}, 1']$$

et on tiendrait compte des relations introduites par

$$(\vartheta_u \vartheta_v) f = \nu \vartheta_u f - \lambda \vartheta_v f \tag{31}$$

$$(\vartheta_u \vartheta_v) \mu = \nu\rho - \lambda\sigma$$

On pourra encore introduire le paramètre différentiel du second ordre

$$\vartheta_{uv} f = f_{11}\, e^{-(l+n)} \tag{32}$$

et prendre pour invariants distincts d'ordre 2

$$\vartheta_u \lambda\,,\ \vartheta_v \lambda,\ \vartheta_u \nu\,,\ \vartheta_v \nu\,,\ \vartheta_u \rho = \vartheta_u^2 \mu\,,\ \vartheta_v \sigma = \vartheta_v^2 \mu\,,\ \vartheta_{uv} \mu\,.$$

Les invariants μ, λ, ν sont essentiels; dans le cas général, des invariants suffisants seront donnés par $\mu, \lambda, \nu, \vartheta_u \lambda, \vartheta_v \lambda, \vartheta_u \nu, \vartheta_v \nu$.

17. — Un cas particulier intéressant, celui des formes χ_0, pour lesquelles L = N = 0, a été étudiée complétement par M. A. Tresse (*loc. cit.*, p. 54); en procédant un peu différemment, nous introduirions, après les invariants d'ordres 2 et 3 : $\varkappa = m_{11}\, e^{-m}$ $\iota = \varkappa_{10}\, \varkappa_{01}\, e^{-m}$, les deux paramètres différentiels $\frac{f_{10}}{\varkappa_{10}}$ et $\frac{f_{01}}{\varkappa_{01}}$; d'où les invariants d'ordre 4 : $\frac{\iota_{10}}{\varkappa_{10}}$, $\frac{\iota_{01}}{\varkappa_{01}}$, $\frac{\varkappa_{11}}{\varkappa_{10}\varkappa_{01}}$, etc.

Il reste à indiquer comment les invariants d'une forme qua-

---

[1] Nous avons, dans les divers cas étudiés, conservé la même notation pour les paramètres différentiels $\vartheta_u f$, $\vartheta_v f$, sans que ces expressions soient les mêmes dans ces différents cas.

dratique χ peuvent être reliés à ceux de formes linéaires. On peut, en effet, écrire, avec les notations des n°s 14 et 15

$$\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2 \equiv \varpi^2 + \chi_0 \qquad \chi_0 \equiv 2M_0\, du\, dv \tag{33}$$

mais si la conservation du système de formes ϖ_1, ϖ_2, entraîne celle de χ, l'inverse n'a pas lieu; par suite, les invariants de χ sont des invariants du système ϖ_1, ϖ_2, la réciproque n'étant généralement pas vraie. On vérifiera ainsi les relations

$$\mu = \frac{(\varepsilon + \zeta)^2}{4\varepsilon\zeta} \qquad \text{(notations du n° 14)}$$

$l = a$, $n = b$, donc $\lambda = \alpha$, $\nu = \beta$ (notations du n° 15), etc.

On peut d'ailleurs profiter de l'arbitraire de la décomposition $\chi \equiv \varpi_1 \varpi_2$ pour imposer aux formes linéaires ϖ_1 et ϖ_2 une relation invariante assurant l'identité des systèmes d'invariants de χ d'une part, ϖ_1 et ϖ_2 d'autre part, en *normant* convenablement ces dernières formes sans porter atteinte à la généralité de χ, ce qui est du reste possible de différentes façons, par exemple avec $\varepsilon + \zeta = 1$, ou $\varepsilon\zeta = 1$. On est ainsi ramené à l'étude d'un système *particulier* de formes linéaires.

En utilisant au contraire la relation $\chi \equiv \varpi^2 + \chi_0$ (où il y a seulement deux choix possibles pour la forme χ_0), on se ramène à l'étude d'un système formé par une forme ϖ générale et une forme quadratique particulière χ_0.

Cas d'une équation de Pfaff.

18. — Soit seulement à conserver l'*équation*

$$\varpi \equiv A(u, v)\, du + B(u, v)\, dv = 0 \tag{34}$$

ce qui astreint les coefficients à la condition

$$\frac{\delta A - A\xi'}{A} = \frac{\delta B - B\eta'}{B}. \tag{35}$$

Ecartons d'abord les équations invariantes $A = 0$, $B = 0$, et posons

$$A = e^a \qquad B = e^b \qquad C = \frac{A}{B} = e^c \qquad a - b = c$$