

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Davos, 30 août 1929.

La Société Mathématique suisse a tenu sa 19^{me} assemblée ordinaire annuelle à Davos, le 30 août 1929, sous la présidence de M. le Prof. S. BAYS (Fribourg), président, en même temps que la 110^{me} session annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles.

La *partie scientifique* a été consacrée aux communications de MM. Bays, Brandt et Schubarth.

1. — S. BAYS (Fribourg). — *Sur un théorème de Viggo Brun et l'intervalle entre deux nombres premiers consécutifs.* — On sait que la série des inverses de tous les nombres premiers diverge. Viggo Brun a prouvé en 1919 le théorème important :

La série des inverses des nombres premiers Jumeaux (distants de 2):

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \dots$$

*converge*¹.

Il se trouve que la démonstration de Brun, exposée par Landau, est entièrement indépendante du nombre 2, intervalle entre les nombres premiers jumeaux. En reprenant cette démonstration pas à pas, elle marche sans plus de difficultés avec l'intervalle $2n$ qu'avec 2.

Eu égard en particulier à l'affirmation suivante de A. de Polignac (Nouvelles Ann. Mathém. 1849): *Chaque nombre pair intervient comme intervalle entre les nombres premiers consécutifs et une infinité de fois*, l'intérêt de la démonstration de Brun est le même pour l'intervalle $2n$ que pour l'intervalle 2. Autrement dit: les suites de couples de nombres premiers consécutifs distants de 4, ou de 6, ou de 8, etc., ont le même intérêt que celles des nombres premiers distants de 2.

J'ai étudié momentanément jusqu'à 20000 l'intervalle entre les nombres premiers consécutifs. Appelons $\rho_{2n}(x)$ la fonction qui donne,

¹ Voir LANDAU. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1. 1927, p. 71-78.

dans la suite des nombres premiers consécutifs jusqu'à x , le nombre des intervalles égaux à $2n$. Bien qu'il soit difficile d'affirmer, en particulier dans cette question des nombres premiers, je reprends d'abord sans aucune crainte d'erreur l'affirmation de Polignac: *chaque $\rho_{2n}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, est positive et croît indéfiniment avec x .*

On sait d'ailleurs déjà, et la preuve en est presque immédiate, que l'intervalle entre deux nombres premiers consécutifs peut devenir arbitrairement grand.

Ensuite les deux fonctions $\rho_2(x)$ et $\rho_4(x)$ paraissent coïncider dans leurs valeurs d'une façon vraiment exceptionnelle; si elles peuvent se représenter approximativement par une expression analytique, élémentaire ou non, comme $\pi(x)$ l'est par

$$\frac{x}{\log x} \quad \text{ou} \quad \int_0^x \frac{dx}{\log x}$$

ce doit être la même expression pour les deux fonctions. Par contre $\rho_6(x)$ est certainement une fonction plus grande. D'autre part, il y a une chute marquée de la fonction à chaque multiple de 6; par contre, excepté dans le cas $n = 1$, elle garde des valeurs sensiblement égales pour les indices $6n$, $6n - 2$ et $6n - 4$; l'expression analytique approximative, si elle existe, pourrait donc, peut-être, être la même pour $\rho_{6n}(x)$, $\rho_{6n-2}(x)$ et $\rho_{6n-4}(x)$, excepté pour $n = 1$.

Concernant l'arrangement des intervalles successifs entre les nombres premiers consécutifs, j'ai un premier théorème facile à établir: les intervalles de la forme $6n$, soit 6, 12, 18, ..., peuvent chacun se répéter immédiatement; ceux des formes $6n - 2$ et $6n - 4$, jamais.

2. — H. BRANDT (Aix-la-Chapelle). — *La factorisation des idéaux intégraux dans une algèbre de Dedekind.* — Dans une algèbre de Dedekind, en général, on peut factoriser un idéal intégral en idéaux premiers de manières très différentes. On demande le nombre de ces factorisations.

Si nous avons dans une algèbre simple de Dedekind un ordre maximal \mathfrak{o} et un idéal irréductible équilatéral (idéal premier bilatéral) \mathfrak{p} , nous ne considérerons que des idéaux \mathfrak{a} qui divisent \mathfrak{p}^s où s désigne un nombre naturel quelconque.

On peut trouver ces idéaux (bilatéraux ou unilatéraux) par l'analyse du système des résidus $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}^s$ désigné par \mathfrak{R} , qui suivant M. Speiser est constitué de la totalité des matrices d'un certain degré k , matrices dont les éléments ont la forme $\alpha_0 + \alpha_1 \pi + \dots + \alpha_{s-1} \pi^{s-1}$. Le nombre π est divisible par \mathfrak{p} mais n'est pas divisible par \mathfrak{p}^2 et les α_i parcourent indépendamment l'un de l'autre un certain système de nombres formant suivant le module \mathfrak{p} un champ galcisien dont l'ordre est p^g .

Ce système de résidus \mathfrak{R} a la propriété remarquable de ne contenir

que des idéaux principaux. Pour cette raison un idéal α peut être représenté par une matrice A .

Soit r_i le rang de A suivant $p^i (i = 1, \dots, s)$ et $r_0 = 0, r_{s+1} = k$; ainsi les différences $r_{i+1} - r_i = t_i (i = 0, 1, \dots, s)$ ne sont pas négatives. Ces nombres r_i ou t_i se trouvent être fondamentaux vis-à-vis de toutes les propriétés de l'idéal α . Ils déterminent le nombre des classes de résidus (norme) \mathfrak{o}/α , ensuite le genre de composantes primaires dont α est le plus petit multiple, puis le nombre des factorisations premières de α et enfin le nombre des idéaux différents de même rang r_i .

Pour ce dernier nombre on trouve la valeur

$$N_{t_0 t_1 \dots t_s} = \frac{P_k}{P_{t_0} P_{t_1} \dots P_{t_s}} p^{gh}$$

où on a posé, pour abrégé

$$h = \sum_{i+j < s} j t_i t_{i+j}$$

$$P_t = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p^{st}}\right) \text{ pour } t > 0 \text{ et } P_0 = 1.$$

De là résulte un moyen de déterminer le nombre des factorisations, c'est-à-dire une formule récurrente

$$\frac{p^{sk} - 1}{p^s - 1} N_{t_0 t_1 \dots t_s} = \sum c_{t'_0 t'_1 \dots t'_s} N_{t'_0 t'_1 \dots t'_s}$$

qui s'obtient en ajoutant de toutes les manières possibles un facteur premier à tous les idéaux dont le rang est $r_i (i = 1, 2, \dots, s)$. Dans la sommation, les t'_i ne se distinguent des t_i que en ceci: un $t_{\lambda-1}$ positif diminue de un, et le t_λ suivant croît de un, pendant que le coefficient correspondant a la valeur

$$c_{t'_0 t'_1 \dots t'_s} = p^{g(t_\lambda + \dots t_s)} \cdot \frac{p^{g(t_\lambda + 1)} - 1}{p^g - 1}$$

et λ prend toutes les valeurs $1, 2, \dots, s$, qui donnent un $t_{\lambda-1}$ positif (ou un r_λ différent de $r_{\lambda-1}$). On prend s assez grand pour que $r_s = k$ ou $t_s = 0$.

Si l'on répète l'application de cette formule pour s suffisamment grand, on peut ainsi déterminer pas à pas tous les idéaux ayant 2, 3 ou plus de facteurs premiers. Le même idéal réapparaît plusieurs fois, et cette multiplicité est précisément le nombre cherché des factorisations premières.

Si on a $k = 2$ on trouve le nombre des factorisations pour tous les

idéaux qui se décomposent en r facteurs premiers, toujours au moyen de tous les segments possibles de la série

$$1 + \sum \binom{r}{t-1} \frac{r-2t+1}{t} p^{ts} \quad \left(1 \leq t < \frac{r+1}{2}\right)$$

Pour un k plus grand, les formules deviennent plus compliquées. Nous ne donnerons que la formule simple pour les idéaux qui sont plus petits multiples de r idéaux premiers. On obtient pour $r \leq k$ le nombre

$$1 \cdot (1 + p^g) \dots (1 + p^g + p^{2g} + \dots + p^{(r-1)g}) .$$

De tels idéaux sont représentables comme multiples aussi de différentes manières. L'étude de leurs nombres et de la répartition des facteurs premiers aux différents multiples conduit à des problèmes combinatoires semblables aux problèmes de Steiner (Journal f. r. u. a. Math. 45 (1853) S. 181.)

3. — E. SCHUBARTH (Bâle). — *Invariants topologiques des réseaux de surfaces*. — Appelons réseau de surfaces un système composé par quatre familles de surfaces, $\tau_i = \text{const}$, de sorte que trois familles quelconques forment un système de coordonnées. Soit $\Phi(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 0$ la relation entre les τ_i et considérons un domaine D où $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_i} \neq 0$. On cherche les invariants vis-à-vis les deux groupes suivants:

I. Les transformations « topologiques » \bar{T} :

$$\tau_i = \tau_i(\bar{\tau}_i)$$

(τ_i une fonction supposée comme univoque, continue et dérivable aussi souvent qu'il sera nécessaire, de même que la fonction inverse).

II. Les « normalisations » T^* :

$$\Phi^* = \lambda \Phi, \quad \lambda(\tau_1, \dots, \tau_4) \neq 0 .$$

Convenons d'écrire pour abréger

$$\Phi_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_i}, \quad \Phi_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau_i \partial \tau_k}, \quad \varepsilon_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{\Phi_i \Phi_k},$$

et introduisons les opérateurs

$$\Gamma_i = \frac{1}{\Phi_i} \frac{\partial}{\partial \tau_i}, \quad \Lambda_{ik} = \Gamma_i - \Gamma_k,$$

et soient i, k, l, m quatre nombres différents = 1, 2, 3, 4. On trouve alors:

1° 3 invariants relatifs d'ordre 2: $\nu_{12,34}, \nu_{23,14}, \nu_{31,24}$, où l'on a posé

$$\nu_{ik,lm} = \varepsilon_{il} - \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{im} + \varepsilon_{km} ;$$

ils sont liés par la relation

$$\nu_{12,34} + \nu_{23,14} + \nu_{31,24} = 0 . \tag{1}$$

La relation $\nu_{ik,lm} = 0$ (remplie dans le domaine D entier) caractérise les réseaux contenant une famille de surfaces « diagonales » [surfaces engendrées par des courbes C_{ik} , sections $\{\tau_i = \text{const}, \tau_k = \text{const}\}$, aussi bien que par des courbes C_{lm}]. La condition que tous les invariants $\nu_{ik,lm}$ s'annulent dans le domaine D, est nécessaire et suffisante pour qu'on ait un réseau « octogonale », topologiquement applicable à un réseau de quatre familles de plans parallèles. On a ainsi démontré analytiquement le théorème de Blaschke: Les réseaux octogonaux sont caractérisés par la propriété que les courbes d'intersection de leurs surfaces se répartissent entre systèmes de coordonnées sur trois familles de surfaces diagonales formant elles-mêmes un système de coordonnées dans l'espace.

2° 4 invariants relatifs d'ordre 3:

$$\rho^4 = \Lambda_{12} \varepsilon_{12} + \Lambda_{23} \varepsilon_{23} + \Lambda_{31} \varepsilon_{31}$$

et ceux qui en résultent par un changement cyclique des indices. Ils satisfont à la relation

$$\rho^1 - \rho^2 + \rho^3 - \rho^4 = 0 . \tag{2}$$

$\rho^i = 0$ caractérise les réseaux de courbes d'intersection, situés dans les surfaces $\tau_i = \text{const}$, comme des réseaux « hexagonaux », c'.-à-d. topologiquement applicables à un réseau de trois familles de droites parallèles.

$$\nu_{ik,lm} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \rho^i = \rho^k ,$$

$$\nu_{12,24} = \nu_{23,14} = \nu_{31,24} = 0 \quad \text{entraîne} \quad \rho^1 = \rho^2 = \rho^3 = \rho^4 = 0 .$$

D'une manière générale, les conditions que certains invariants relatifs s'annulent dans le domaine D peuvent servir à caractériser les possibilités inéquivalentes d'arriver, par une normalisation convenable, à une fonction Φ^* , somme de fonctions dépendant de moins de quatre variables.

On a par exemple:

$$\nu_{ik,lm} = 0 \iff \Phi^* = F(\tau_i, \tau_k) + G(\tau_l, \tau_m) .$$

Les relations entre les invariants relatifs entraînent différents théorèmes de nature géométrique, en particulier la relation (1): Un réseau contenant deux familles de surfaces diagonales en contient une troisième; et la relation (2): Si les réseaux des courbes d'intersection dans trois des familles de surfaces du réseau donné sont à configuration hexagonale, c'est aussi le cas dans la quatrième famille.

Supposons que les $\nu_{ik, lm}$ ne s'annulent pas tous. On trouve alors

3° un invariant absolu d'ordre 2, six d'ordre 3, onze d'ordre 4, qui forment un système complet d'invariants absolus jusqu'au quatrième ordre. En appliquant sur les invariants absolus cités les opérateurs absolument invariants

$$\frac{1}{\nu_{ik, lm}} \Lambda_{rs} (r, s = 1, 2, 3, 4; r \neq s) ,$$

on arrive aux invariants d'ordre supérieur.

Pour plus de détails, voir les *Abhandlungen aus dem math. Seminar der Universität Hamburg*, 1929.

Dans sa *séance administrative*, l'Assemblée a décidé de modifier comme suit les statuts:

Art. 3. — Pour être admis dans la société, il faut être proposé par « deux membres et agréé par le comité. La société admet également « comme membres les personnes morales ainsi que les instituts, « bibliothèques, etc.

« Art. 4. — Les membres paient une cotisation annuelle de 4 francs. « Un versement unique de 60 francs dispense de cette contribution « périodique les personnes physiques. »

Le comité pour les années 1930 et 1931 a été constitué de la manière suivante: MM. les Prof. Samuel DUMAS, président, G. JUVET, vice-président, W. SAXER, secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Saint-Gall*.