Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 28 (1929)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL

Autor: Brunner, William

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-22593

U (x) étant croissante. On en déduit sans peine que, à partir d'une valeur r, on a aussi

$$U(x) < x^{\rho+\varepsilon}$$

et

$$\log M(R) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} \; ,$$

donc

$$\log M^1(r) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} + \log \frac{1}{R-r} \; .$$

En prenant

$$R = r + r^{1-\rho-\varepsilon} \; ,$$

on obtient

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log r^{\rho-1+\varepsilon} + K \; ,$$

K étant fini. Par suite, *si petit que soit* ε, *on a, à partir d'une valeur de* r

$$M^1(r) < r^{\rho-1+\varepsilon} M(r) \; .$$

C'est l'inégalité que je voulais établir.

SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL

PAR

William Brunner (Zurich).

Soit S_1 *une surface fermée entourant le point* O *et* S_2 *une autre surface fermée entourant* S_1. *Supposons que* S_1 *et* S_2 *soient des surfaces de niveau de la fonction harmonique* U (x, y, z), *régulière dans la partie de l'espace comprise entre* S_1 *et* S_2. *Si* S_1 *et* S_2 *jouissent de la propriété qu'une demi-droite quelconque issue du point* O *ne les coupe qu'une fois, toutes les surfaces de niveau de* U *comprises entre* S_1 *et* S_2 *jouissent de la même propriété* [1].

[1] Les surfaces jouissant de ladite propriété s'appellent « sternförmig » en allemand. Le théorème analogue pour le cas du plan (potentiel logarithmique) est bien connu, voir par ex. G. Pólya et G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze* I (1925), p. 145. Le théorème énoncé m'a été indiqué sans démonstration par M. G. Pólya, à l'occasion de mon travail de diplôme, ensemble avec un autre analogue, relatif aux surfaces de niveau convexes.

Les surfaces S_1, S_2 étant des suıfaces de niveau de U, leurs équations sont de la forme

$$U(x, y, z) = c_1, \qquad U(x, y, z) = c_2,$$

où c_1, c_2 sont des constantes; nous supposons $c_1 < c_2$. La normale extérieure à ces surfaces de niveau est un vecteur dont les composantes sont proportionnelles à

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Supposons que le point O est situé à l'origine. Alors le cosinus de l'angle formé par la normale extérieure au point x, y, z et par une demi-droite issue de O et passant par ce point, est du même signe que l'expression

$$x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} = V.$$

Par hypothèse, l'angle en question est *aigu* en chaque point de S_1 et de S_2, donc la fonction V est *positive* sur ces surfaces. Mais la fonction V est harmonique, puisque

$$\Delta V = 2\Delta U + x\frac{\partial \Delta U}{\partial x} + y\frac{\partial \Delta U}{\partial y} + z\frac{\partial \Delta U}{\partial z} = 0.$$

La fonction harmonique V étant positive sur S_1 et S_2, reste positive dans la partie de l'espace comprise entre ces deux surfaces. C.q.f.d.