

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL
Autor: Stoyanoff, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22595>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 08.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

APPLICATION DES NOTATIONS TENSORIELLES DANS LE CALCUL VECTORIEL

PAR

A. STOYANOFF (Sofia).

§ 1. Soient a et b deux vecteurs de composantes a_m et b_m (ou bien a^m et b^m)¹. On appelle *produit intérieur* de a et b l'invariant $a_m b^m$. On appelle *produit extérieur* de a et b le tenseur symétrique gauche du II^e ordre de composantes $\sigma^{ik} = a^i b^k - a^k b^i$.

Dans l'espace euclidien à 3 dimensions ce tenseur n'a que 3 composantes indépendantes différentes de zéro; dans le calcul vectoriel on le confond avec un vecteur. On pourrait employer pour ce vecteur la notation suivante

$$v_m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p, \quad \text{ou bien} \quad v^m = \varepsilon^{mnp} a_n b_p,$$

ε_{mnp} désignant un symbole à 3 indices² défini de la façon suivante:
 $\varepsilon_{mnp} = 0$, si deux des indices sont égaux;

$\varepsilon_{mnp} = \text{sgn}(m, n, p)$, si les 3 indices sont différents³ (par conséquent mnp représente une permutation des nombres 1,2,3).

Remarque. On peut se servir également de la formule de définition plus compliquée

$$\varepsilon_{mnp} = \frac{1}{2} (m - n)(n - p)(p - m).$$

¹ Comme dans le calcul vectoriel on opère dans un espace euclidien à trois dimensions et qu'on n'emploie que des coordonnées cartésiennes rectangulaires, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre les composantes covariantes et contravariantes d'un tenseur.

² C'est un cas particulier d'un tenseur plus général introduit par MM. Ricci et Levi-Civita.

³ Je rappelle que $\text{sgn}(m, n, p) = \pm 1$, suivant que la permutation mnp a un nombre pair ou impair d'inversions. Ex.: $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$.

Par conséquent

$$\varepsilon_{mnp} = -\varepsilon_{mpn}, \text{ etc.} \quad \varepsilon_{mnp} = \varepsilon_{npm} = \varepsilon_{pmn}.$$

Calculons par exemple ν_1 . On a $\nu_1 = \varepsilon_{1np} a^n b^p$ (cette somme ne contient que deux termes différents de zéro) $= \varepsilon_{123} a^2 b^3 + \varepsilon_{132} a^3 b^2 = a^2 b^3 - a^3 b^2$.

§ 2. Plus tard, nous rencontrerons le symbole à 4 indices

$$g_{np}^{rs} = \varepsilon_{mnp} \varepsilon^{mrs} = \varepsilon_{1np} \varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np} \varepsilon^{2rs} + \varepsilon_{3np} \varepsilon^{3rs}.$$

Propriétés de g_{np}^{rs} .

$$g_{np}^{rs} = -g_{pn}^{rs} = -g_{np}^{sr} = g_{pn}^{sr};$$

par conséquent $g_{np}^{rs} = 0$, si $n = p$ ou $r = s$.

Cherchons les composantes de g_{np}^{rs} non nulles. Donnons à n et p deux valeurs distinctes choisies parmi les nombres 1, 2, 3; alors dans la somme précédente

$$\varepsilon_{1np} \varepsilon^{1rs} + \varepsilon_{2np} \varepsilon^{2rs} + \varepsilon_{3np} \varepsilon^{3rs}$$

il ne reste qu'un seul terme obtenu en donnant à m la troisième valeur; on en déduit que r et s doivent avoir les mêmes valeurs que n et p ; c'est-à-dire on doit avoir $r = n$, $s = p$, ou bien $r = p$, $s = n$. Dans le premier cas g_{np}^{rs} est égal à $+1$, dans le second à -1 .

Application. Considérons la somme $g_{np}^{rs} A_{rs..}$ ($A_{rs..}$ désignant un tenseur à deux ou plusieurs indices, parmi lesquels se trouvent r et s). Effectuons la sommation indiquée; d'après les propriétés du symbole g , nous n'aurons que deux termes

$$g_{np}^{np} A_{np..} + g_{np}^{pn} A_{pn..} = A_{np..} - A_{pn..};$$

par conséquent

$$g_{np}^{rs} A_{rs..} = A_{np..} - A_{pn..}$$

c'est-à-dire g_{np}^{rs} joue le rôle de signe de substitution.

On vérifie sans peine que $g_{np}^{rs} + g_{nr}^{sp} + g_{ns}^{pr} = 0$, quels que soient n, p, r, s .

§ 2'. On voit immédiatement que $\varepsilon_{mnp} \varepsilon^{mns} = 2g_p^s$, c'est-à-dire $+2$ ou 0 suivant que $s = p$ ou $s \neq p$.

§ 3. Nous pouvons maintenant aborder l'algèbre vectorielle et déduire avec une grande facilité les formules les plus compliquées. Par exemple

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{v} \cdot \vec{c} = v_m c^m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p c^m = \varepsilon_{npm} a^n b^p c^m \\ &= \text{sgn}(n, p, m) a^n b^p c^m = \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp} a^n v^p = \varepsilon_{pmn} a^n \varepsilon^{prs} b_r c_s = g_{mn}^{rs} a^n b_r c_s \\ &= a^n b_m c_n - a^n b_n c_m = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} = u_m v^m = \varepsilon_{mnp} a^n b^p \varepsilon^{mrs} c_r d_s = g_{np}^{rs} a^n b^p c_r d_s \\ &= a^n b^p c_n d_p - a^n b^p c_p d_n = (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) (\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{u} \times \vec{v} = \varepsilon_{mnp} u^n v^p = \varepsilon_{npm} \varepsilon^{nrs} a_r b_s \varepsilon^{pik} c_i d_k \\ &= g_{pm}^{rs} \varepsilon^{pik} a_r b_s c_i d_k = \varepsilon^{pik} a_p b_m c_i d_k - \varepsilon^{pik} a_m b_p c_i d_k \\ &= (\vec{a} \times \vec{c} \cdot \vec{d}) \vec{b} - (\vec{b} \times \vec{c} \cdot \vec{d}) \vec{a}. \end{aligned}$$

§ 4. *Notations.* Nous désignerons par x^m ($m = 1, 2, 3$), les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, par $\Delta_m F$ ou $\Delta^m F$ la dérivée par rapport à x^m d'une fonction de point, c'est-à-dire

$$\Delta_m F \quad \text{ou} \quad \Delta^m F = \frac{\partial F}{\partial x^m}.$$

On a par définition, φ étant un scalaire, \vec{u} un vecteur, $\text{grad } \varphi =$ le vecteur de composantes $\varphi_m = \Delta_m \varphi$,

$\text{div } \vec{u} =$ le scalaire $\Delta_m u^m$,

$\text{rot } \vec{u} =$ le vecteur $R_m^{(\vec{u})} = \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p$.

Ceci posé, on obtient sans peine toutes les formules de l'analyse vectorielle

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta_m \varphi^m = \Delta_m \Delta^m \varphi = \Delta \varphi \text{ (opérateur de Laplace)}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \varepsilon_{mnp} \Delta^n \varphi^p = \varepsilon_{mnp} \Delta^n \Delta^p \varphi \equiv 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u} = \Delta^m R_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p = \varepsilon_{mnp} \Delta^m \Delta^n u^p \equiv 0 .$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = \varepsilon_{mnp} \Delta^n R^p = \varepsilon_{pmn} \Delta^n \varepsilon^{prs} \Delta_r u_s = g_{mn}^{rs} \Delta^n \Delta_r u_s$$

$$= \Delta^n \Delta_m u_n - \Delta^n \Delta_n u_m = \Delta_m (\Delta^n u_n) - \Delta u_m = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \Delta \vec{u} .$$

$$\operatorname{div} (\varphi \vec{u}) = \Delta_m (\varphi u^m) = \varphi_m u^m + \varphi \Delta_m u^m = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{u} + \varphi \operatorname{div} \vec{u}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\varphi \vec{u}) &= \varepsilon_{mnp} \Delta^n (\varphi u^p) = \varepsilon_{mnp} \varphi^n u^p + \varphi \varepsilon_{mnp} \Delta^n u^p \\ &= \operatorname{grad} \varphi \times \vec{u} + \varphi \operatorname{rot} \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\vec{u} \times \vec{v}) &= \operatorname{div} \vec{w} = \Delta^m w_m = \Delta^m \varepsilon_{mnp} u^n v^p \\ &= v^p \varepsilon_{mnp} \Delta^m u^n + u^n \varepsilon_{mnp} \Delta^m v^p \end{aligned}$$

$$= v^p \varepsilon_{pmn} \Delta^m u^n - u^n \varepsilon_{nmp} \Delta^m v^p = v^p R_p^{(\vec{u})} - u^n R_n^{(\vec{v})}$$

$$= \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} .$$