

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** SOLUTION  
**Autor:** Gambier, Bertrand

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Placer en particulier les plans  $P$  qui passent par une sécante commune à  $\Delta$  et  $\Delta'$  ou sont perpendiculaires à cette sécante.

Trouver l'enveloppe  $\Gamma$  des plans  $P$  passant par un point fixe quelconque  $S$ ; on déterminera l'enveloppe des traces de ces plans sur un plan perpendiculaire à  $Ox$  ou  $Oy$ . Cas particulier, où  $S$  est placé sur une droite  $g$  (ou  $h$ ).

Trouver l'enveloppe  $\Gamma'$  des plans  $P$  qui sont parallèles à une direction de droite donnée; cas particulier où cette direction est perpendiculaire à  $Ox$  ou  $Oy$ .

3° On demande d'étudier les droites  $A$  telles que la symétrique de l'une des droites  $\Delta$ ,  $\Delta'$  par rapport à chacune de ces droites  $A$  rencontre l'autre ou lui est parallèle.

On démontrera que le lieu de ces droites  $A$  qui passent par un point donné  $S$  est le cône supplémentaire d'un cône qui se définit comme le cône  $\Gamma$  du n° 2, à l'aide d'un système de deux droites, autre que celui des droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; que l'enveloppe de ces droites  $A$  qui sont situées dans un plan donné  $\Pi$  est la section droite d'un cylindre qui se définit également comme le cylindre  $\Gamma'$  du n° 2.

On reconnaîtra dans quels cas ce lieu et cette enveloppe se décomposent.

On démontrera que le lieu des droites  $A$  qui sont parallèles à une direction de droite donnée est un plan  $P$  du n° 2.

4° Démontrer que par chaque droite  $A$  passent toujours deux plans  $P$ , dont on distinguera les rôles, et que, si la droite  $A$  varie en restant dans un plan fixe  $\Pi$ , l'un de ces deux plans  $P$  reste parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe.

## SOLUTION

PAR

M. Bertrand GAMBIER (Paris).

*N. B.* — Le lecteur est prié de faire lui-même les figures, d'ailleurs très simples.

1. —  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  sont chacun axe de symétrie de la figure  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ;  $Oz$  perce  $\Delta$  en  $A$ ,  $\Delta'$  en  $A'$ ; prenons comme demi-droite positive sur  $Oz$  la direction  $OA$  et soit  $A'O = OA = h$ ; menons par  $O$  les parallèles  $OD$ ,  $OD'$  à  $\Delta$  et  $\Delta'$  et soit  $2\phi$  l'angle aigu de ces droites; prenons pour direction positive  $Ox$  la bissectrice (dans un ou l'autre sens) de l'angle aigu de  $OD$ ,  $OD'$  et prenons comme sens positif de rotation dans le plan  $Oxy$  le sens qui amène  $OD$  sur  $OD'$ :  $Oy$  en résulte.

Soit maintenant un plan  $\Pi$  perpendiculaire à  $Ox$ , d'abscisse  $x_0$ ; la symétrie autour de  $Oz$  permet de supposer  $x_0 > 0$ ; soient  $\Delta'_1$  la symétrique de  $\Delta'$  par rapport à  $\Pi$ ,  $A'X'$ ,  $A'Y'$  les parallèles à  $Ox$ ,  $Oy$  menées par  $A'$ ,  $AX$  la parallèle à  $Ox$  menée par  $A$ . Si  $\alpha$  est pied de la perpendiculaire menée de  $A'$  sur  $\Delta'_1$  ( $\Delta'_1$  est dans le plan  $A'X'Y'$ ),  $A\alpha$  est perpendiculaire sur  $\Delta'_1$ ; d'une part tous les points de  $\Pi$  sont équidistants de  $\Delta'$  et  $\Delta'_1$ , de l'autre le lieu des points équidistants de  $\Delta$  et  $\Delta'_1$  est le plan  $Q$  médiateur de  $A\alpha$ : donc la droite  $(g)$  commune à  $\Pi$  et  $Q$  est le lieu des points de  $\Pi$  équidistants de  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; la parallèle à  $\Delta$  et  $\Delta'_1$  issue du point  $x_0$  de  $Ox$  est manifestement tout entière dans  $Q$ , de sorte que la droite  $(g)$  rencontre  $Ox$  en  $x_0$ ; cette droite  $(g)$  est perpendiculaire sur  $Ox$  et  $A\alpha$ , donc aussi sur la droite  $A\beta$  obtenue en projetant  $\alpha$  en  $\beta$  sur  $A'Y'$ ; or  $A'\alpha$  égale  $2x_0 \sin \varphi$ , et  $A'\beta$  égale  $2x_0 \sin \varphi \cos \varphi$ ; si on complète le rectangle  $AA'\beta\gamma$ , la diagonale  $A\beta$  a sa pente opposée à celle de  $A'\gamma$ , donc égale à  $-\frac{h}{x_0 \sin \varphi \cos \varphi}$ ; la pente de  $(g)$  dans le plan  $\Pi$  est donc égale à  $\frac{x_0 \cos \varphi \sin \varphi}{h}$ ; si  $V$  est l'angle  $(g, Oz)$ , cette pente représente  $\cot V$ : nous avons pris le mot pente dans l'acception usuelle, dans le plan  $\Pi$  ou le plan parallèle  $yOz$ ; le premier axe est  $Oy$ , le second  $Oz$ . Les équations de  $(g)$  sont donc

$$x = x_0 \quad \frac{z}{y} = \frac{x_0 \sin \varphi \cos \varphi}{h} . \quad (1)$$

Ces considérations très élémentaires donnent l'équation de la surface  $\Sigma$  lieu des droites  $(g)$

$$hz = xy \sin \varphi \cos \varphi . \quad (2)$$

Le même raisonnement s'applique aux plans  $\Pi_1$  perpendiculaires à  $Oy$ : il suffit d'ailleurs, si l'on veut, de permuter  $Ox$  avec  $Oy$ ,  $x_0$  avec  $y_0$  et  $\varphi$  avec  $\frac{\pi}{2} - \varphi$  [l'ordre des axes est alors  $Oyxz$  et  $(Oy, \Delta') = \frac{\pi}{2} - \varphi$  avec le nouveau sens de rotation]; les équations d'une droite  $(h)$  sont

$$y = y_0 \quad \frac{z}{x} = \frac{y_0 \sin \varphi \cos \varphi}{h} \quad (3)$$

résultat bien d'accord avec (2). La surface  $\Sigma$  est un parabolôïde équilatère, de sommet  $O$ , d'axe  $Oz$ , de génératrices principales  $Ox$ ,  $Oy$ .

(Dans ce qui suit nous utiliserons les propriétés suivantes qui se démontrent aisément, par exemple en utilisant le théorème relatif aux quatre points d'intersection d'un quadrilatère gauche et d'un plan, simple extension du théorème de Ménélaüs: les sécantes communes à trois droites parallèles à un même plan  $P$  sont elles-mêmes

parallèles à un même plan Q et engendrent une surface doublement réglée.)

On passe de  $\Delta'$  à  $\Delta$  par deux symétries: la première, relative à  $\Pi$ , transforme  $\Delta'$  en  $\Delta'_1$ , la seconde relative à Q transforme  $\Delta'_1$  en  $\Delta$ ; une rotation autour de  $(g)$ , de même sens que celle qui amène  $\Pi$  sur Q et double de cette dernière, amène  $\Delta'$  sur  $\Delta$ ; la valeur absolue de l'angle  $(\Pi, Q)$  est égale à celle W de l'angle des perpendiculaires  $\alpha\beta$ ,  $\alpha A$  menées de  $\alpha$  à ces deux plans; on a

$$\operatorname{tg} W = \left| \frac{A\beta}{\beta\alpha} \right| = \frac{\sqrt{h^2 + x_0^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}}{|\alpha_0| \sin^2 \varphi} \quad (4)$$

Chaque point  $\omega$  de  $(g)$  est centre d'une sphère tangente à  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; quand  $\omega$  décrit  $(g)$ , cette sphère reste inscrite dans l'hyperboloïde H engendré par la rotation de  $\Delta$  ou  $\Delta'$  autour de  $(g)$ ;  $d$  et  $d'$  étant les points de contact de cette sphère avec  $\Delta$  et  $\Delta'$ , si  $\omega$  décrit  $(g)$  et vient en  $\omega_1$ ,  $d$  et  $d'$  viennent en  $d_1$  et  $d'_1$  et l'on a

$$dd_1 = d'd'_1 = \omega\omega_1 \cos \psi$$

$\psi$  étant l'angle aigu de  $\Delta$  ou  $\Delta'$  avec  $(g)$ ; la sphère circonscrite au tétraèdre  $dd'd_1d'_1$  a son centre aussi sur  $(g)$  et coupe H suivant les deux parallèles issus de  $d$  ou  $d_1$ . Nous allons retrouver ces propriétés dans le numéro suivant.

2. — Si la symétrie par rapport au plan P change  $\Delta'$  en une droite  $\Delta'_1$  rencontrant  $\Delta$ , cette même symétrie change les deux droites concourantes  $\Delta, \Delta'_1$  en deux droites  $\Delta_1, \Delta'$  concourantes, de sorte que les plans P jouent un rôle symétrique relativement à  $\Delta$  et  $\Delta'$ .  $\Delta$  et  $\Delta_1$  se coupent en U dans P,  $\Delta'$  et  $\Delta'_1$  en U' dans P;  $\Delta$  et  $\Delta'_1$  se coupent en  $d$ ,  $\Delta_1$  et  $\Delta'$  en  $d'$  et le plan P est le plan médiateur de  $dd'$ ; P est l'un des bissecteurs de  $\Delta$  et  $\Delta_1$  ou de  $\Delta'$  et  $\Delta'_1$ . Remarquons que  $dd'$  ou  $\Delta_1$  (ou  $\Delta'_1$ ) sont des sécantes communes à  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Réciproquement, soit une sécante commune quelconque à  $\Delta$  et  $\Delta'$ : si on lui fait jouer le rôle de  $dd'$  elle donne un plan P, médiateur de  $dd'$ ; si on lui fait jouer le rôle de  $\Delta_1$ , elle donne deux plans P, bissecteurs de cette sécante et de  $\Delta$ ; si on lui fait jouer le rôle de  $\Delta'_1$ , elle donne deux plans P, bissecteurs de cette droite et  $\Delta'$ : chaque sécante commune fournit ainsi cinq plans P, du moins en supposant qu'elle ne soit parallèle à aucune des droites  $\Delta$  ou  $\Delta'$ : dans ce dernier cas, supposons la parallèle à  $\Delta$  et appelons la  $\Delta'_1$ ; elle ne donne plus que trois plans P, à savoir les plans  $\Pi$  ou  $\Pi_1$  et le plan Q de la première partie (en considérant ce cas comme cas limite du précédent, on doit ajouter le plan de l'infini trouvé une fois comme limite du médiateur de  $dd'$ , et une nouvelle fois comme limite d'un bissecteur de  $\Delta$  et  $\Delta_1$ ).



Soit donc un plan  $P$  quelconque: il est l'un des bissecteurs de  $\Delta$  et d'une sécante  $\Delta_1$  commune à  $\Delta$  et  $\Delta_1$ : chaque bissecteur  $Q_1$  ou  $Q_2$  de  $\Delta_1$  et  $\Delta'$  coupe  $P$  suivant une droite dont chaque point est équidistant de  $\Delta$  et  $\Delta_1$  d'une part, de  $\Delta_1$  et  $\Delta'$  de l'autre, donc de  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; chacune de ces droites est donc sur  $\Sigma$ ; une quelconque de ces deux droites fait le même angle avec  $\Delta$  et  $\Delta_1$  d'une part, avec  $\Delta_1$  et  $\Delta'$  de l'autre, donc avec  $\Delta$  et  $\Delta'$ : autrement dit chacune d'elles est parallèle à un bissecteur des droites  $D$  et  $D'$ , c'est-à-dire  $xOz$  ou  $yOz$ ; ces droites sont donc bien une droite  $(g)$  et une droite  $(h)$  de la première partie. La sphère tangente à  $\Delta$  et  $\Delta'$  en  $d$  et  $d'$  est commune aux deux séries de sphères tangentes à  $\Delta$  et  $\Delta'$  ayant leur centre sur ces droites  $(g)$  et  $(h)$  du plan  $P$ ;  $P$  est tangent à  $\Sigma$  au centre de cette sphère. Le plan  $\Pi$  de la première partie est un plan  $P$  particulier contenant une droite  $(g)$  à distance finie et une droite  $(h)$  rejetée à l'infini.

Inversement, soit une droite  $(g)$  quelconque; elle est l'axe d'un hyperboloïde de révolution  $H$  contenant  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; la rotation continue de  $\Delta$  autour de  $(g)$  donne  $\infty^1$  génératrices de  $H$  sans point commun entre elles; chaque plan méridien de  $H$  est plan de symétrie de  $H$ , de sorte que les symétriques de  $\Delta$  relativement à ces méridiens forment  $\infty^1$  droites nouvelles situées sur  $H$ , rencontrant toutes  $\Delta$ ; chacune d'elles rencontre  $\Delta'$ , car la rotation d'amplitude  $W$  amenant  $\Delta$  sur  $\Delta'$  par rotation autour de  $(g)$  peut se décomposer en deux symétries successives autour de deux méridiens de  $H$  faisant entre eux l'angle  $\frac{W}{2}$ ;  $\Delta_1$  étant cette génératrice du second système, on prendra comme premier de ces deux méridiens celui qui a transformé  $\Delta$  en  $\Delta_1$ : donc  $\Delta_1$ , se transformant en  $\Delta'$  par symétrie autour du second méridien, rencontre  $\Delta'$ ; par suite, tout plan contenant une droite  $(g)$  ou  $(h)$  est bien plan  $P$ .

Nous avons en passant démontré qu'un hyperboloïde de révolution contient deux systèmes de génératrices, chaque génératrice d'un système rencontrant toutes celles du système opposé et aussi démontré le théorème suivant: étant donné une sphère  $\sigma$  et deux tangentes  $\Delta$ ,  $\Delta'$  de cette sphère, les tangentes nouvelles  $\Delta_1$  qui s'appuient sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont leurs points de contact avec  $\sigma$  répartis sur l'un ou l'autre de deux cercles passant par les points de contact  $d$  et  $d'$  de  $\Delta$  et  $\Delta'$  avec  $\sigma$ ; ces cercles sont les parallèles de contact avec  $\sigma$  des deux hyperboloïdes ayant pour axe la droite  $(g)$  ou  $(h)$  située dans le plan médiateur de  $dd'$ ; le plan de chaque cercle est parallèle à l'une des bissectrices  $Ox$ ,  $Oy$  de  $D$  et  $D'$ .

Ce qui précède situe le plan  $P$  perpendiculaire à une sécante commune  $dd'$  de  $\Delta$  et  $\Delta'$ : c'est le plan médiateur de  $dd'$ .

Cherchons maintenant les plans  $P$  passant par une droite *quelconque*  $L$ : la rotation de  $\Delta$  autour de  $L$  fournit un hyperboloïde  $H_1$  qui peut: ne pas couper  $\Delta'$ , la couper en deux points distincts  $u'$ ,  $v'$ , la toucher en un point  $u'$  ou enfin contenir  $\Delta'$ ; dans ce dernier cas  $L$  est une

droite ( $g$ ) ou ( $h$ ) et tout plan contenant  $L$  est plan  $P$ . Dans le premier cas, il n'existe aucun plan  $P$  passant par  $L$ ; dans le second cas, menons par  $u'$  le plan perpendiculaire à  $L$ , qui coupe  $\Delta$  en  $u$ ; sur  $H_1$  le parallèle de  $u'$  passe par  $u$  et il est clair que le plan médiateur de  $uu'$ , qui est un plan  $P$ , contient  $L$ ;  $v'$  fournit de même le second plan  $P$  contenant  $L$ . Le troisième cas est limite du second et correspond à un unique plan  $P$  passant par  $L$ , mais comptant pour deux. En serrant de près cette construction, on voit que la sphère tangente en  $\Delta$  et  $\Delta'$  en  $u$  et  $u'$  a son centre à l'intersection des deux génératrices ( $g_1$ ) et ( $h_1$ ) contenues dans le premier plan  $P_1$  relatif à  $u$  et  $u'$  et que la sphère analogue relative à  $v$  et  $v'$  a son centre au point commun aux droites analogues ( $g_2$ ) et ( $h_2$ ): donc ( $g_1$ ) et ( $h_2$ ) se coupent sur  $L$  et de même ( $g_2$ ) et ( $h_1$ ). On peut donc dire que le problème est ramené, si l'on veut, à trouver les points communs à  $\Sigma$  et à  $L$  et à prendre les génératrices passant en ces points.

La construction se simplifie si  $L$  rencontre  $\Delta$ , car  $H_1$  devient le cône de révolution engendré par  $\Delta$  en tournant autour de  $L$ ; si même  $L$  rencontre  $\Delta$  et  $\Delta'$ , la simplification augmente encore, car on a simplement à tracer les deux génératrices du cône situées dans le plan  $L, \Delta'$ .

Il est commode pour les numéros 3 et 4 de préciser divers résultats relatifs aux plans  $P$ ; à chaque plan  $P$ , tangent au paraboloïde  $\Sigma$ , correspond la sécante  $dd'$ , commune à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , dont  $P$  est le médiateur; soit  $R(a, b, c)$  le milieu de  $dd'$ , point qui, manifestement, est dans le plan  $xOy$ ; le plan  $P$  touche  $\Sigma$  au point  $R_1$ . Supposons que le point  $R$  décrive la droite  $x = a$  du plan  $xOy$ ; la sécante  $dd'$ , d'après une remarque faite au n° 1, reste parallèle à un plan fixe, qui, en raison de la symétrie de la figure relativement à  $Ox$ , ne peut qu'être perpendiculaire à  $Ox$  ou contenir  $Ox$ .

Or, soient  $B, C$  et  $C'$  les points d'abscisse  $a$  sur  $Ox$ ,  $D$  et  $D'$ ; les parallèles à  $Oz$  menées de  $C$  ou  $C'$  percent  $\Delta$  et  $\Delta'$  en  $E, E'$  et les trois points  $B, E, E'$  sont en ligne droite,  $B$  étant le milieu de  $EE'$ ; donc les sécantes communes à  $\Delta, \Delta'$ , parallèles au plan  $yOz$ , ont leur trace horizontale sur  $Ox$  et non sur la droite  $x = a$ ; donc le plan auquel la sécante  $dd'$  reste parallèle contient  $Ox$  et c'est le plan  $Ox, EE'$ ; le plan  $P$  reste donc parallèle à la perpendiculaire à ce plan; comme cette perpendiculaire est parallèle au plan  $yOz$ , la génératrice ( $g$ ) contenue dans  $P$  est fixe, et perpendiculaire sur  $EE'$ ; on a  $CB = a \operatorname{tg} \varphi$ ,  $CE = h$ ; la pente de  $BE$ , calculée comme au n° 1, est  $\frac{-h}{a \operatorname{tg} \varphi}$ ; la pente de ( $g$ ) est donc  $\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{h}$ , de sorte que ( $g$ ) perce  $Ox$  au point d'abscisse  $x_0$  donnée par la relation  $\frac{a \operatorname{tg} \varphi}{h} = \frac{x_0 \sin \varphi \cos \varphi}{h}$ ; on a donc  $x_0 = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ . Pour la même raison, si le point  $R$  décrit la

droite  $y = b$  de  $xOy$ , le plan  $P$  pivote autour de la génératrice ( $h$ ) d'éloignement  $y_0 = \frac{b}{\sin^2 \varphi}$ . Si donc nous considérons le point  $R(a, b, o)$ , le plan  $P$  correspondant contient les deux génératrices ( $g$ ), ( $h$ ) d'abscisse  $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$  ou d'éloignement  $\frac{b}{\sin^2 \varphi}$  et touche le parabolôïde  $\Sigma$  au point  $R_1\left(\frac{a}{\cos^2 \varphi}, \frac{b}{\sin^2 \varphi}, \frac{ab}{h \sin \varphi \cos \varphi}\right)$ .

La droite  $RR_1$  est tangente à  $\Sigma$  au point  $R_1$ . Il est à remarquer que la droite  $RR_1$  est perpendiculaire à la droite  $UU'$  joignant les traces de  $\Delta$  et  $\Delta'$  sur le plan  $P$ ; en effet, si nous abaissons du point  $R$  la perpendiculaire  $Rt$  sur  $UU'$ , la symétrique  $\delta$  de  $\Delta$  relativement à  $Rt$  s'obtient en joignant  $d'$ , symétrique de  $d$ , à  $U_1$  obtenu en prolongeant  $Ut$  de  $tU_1 = Ut$ : l'hyperboloïde  $H_1$  obtenu par rotation de  $\Delta$  autour de  $Rt$  admet donc pour génératrices particulières  $\Delta_1$  (symétrique de  $\Delta$  par rapport au méridien  $P$ ) et  $\delta$ : or,  $\Delta'$  passe au point  $d'$  commun à  $\Delta_1$  et  $\delta$  et est dans le plan  $\Delta_1\delta$ : donc l'hyperboloïde  $H_1$  touche  $\Delta'$  en  $d'$ : d'après ce qui a été expliqué un peu plus haut,  $Rt$  est une droite particulière pour laquelle les deux plans  $P$  correspondants sont confondus; elle est donc tangente à  $\Sigma$  et par suite coïncide avec  $RR_1$ .

Déterminons maintenant les plans  $P$  issus d'un point  $S$  quelconque: projetons  $S$  en  $s$  et  $s'$  sur  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; soient  $Ss = l$ ,  $Ss' = l'$  et portons sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  les segments  $sd$  et  $s'd'$  de longueur algébrique  $u$ ,  $u'$  déterminés par l'équation

$$l^2 + u^2 = l'^2 + u'^2. \quad (1)$$

On a ainsi  $Sd = Sd'$  et le plan médiateur de  $dd'$ , qui est un plan  $P$ , passe en  $S$ . Cette relation se simplifie si  $S$  est sur  $\Sigma$ , car on a alors  $l = l'$  et  $u = \pm u'$ ; le plan  $P$  pivote alors autour de l'une des droites ( $g$ ) ou ( $h$ ) qui passent en  $S$ ; on retrouve les propriétés signalées au n° 1.

Si on suppose maintenant  $l \neq l'$ , il est plus simple de remarquer qu'un plan  $P$  est finalement un plan contenant une droite ( $g$ ) ou ( $h$ ): si donc nous voulons déterminer l'enveloppe  $\Gamma$  des plans  $P$  issus de  $S$ , il suffira de déterminer la section de ce cône  $\Gamma$  par le plan  $yOz$ . Considérons les  $\infty^1$  droites ( $g$ ) et les  $\infty^1$  plans  $S(g)$ : la trace de l'un d'eux sur  $yOz$  est une droite ( $\bar{g}$ ) parallèle à ( $g$ );  $V$  étant l'angle défini plus haut de ( $g$ ) ou ( $\bar{g}$ ) avec  $Oz$ , il y a une relation homographique entre  $x_0$ , abscisse de ( $g$ ), et  $\cot V$ ; or, la perspective de  $Ox$  sur  $yOz$  à partir de  $S$  est une droite  $O\xi$ , trace aussi d'un plan  $P$ ; si donc le point  $\xi_0$  de  $O\xi$  est la perspective de  $x_0$ , on voit qu'il y a correspondance homographique entre  $\xi_0$  et  $\cot V$ : donc,  $\cot V$  pouvant être regardé comme le paramètre qui fixe un point à l'infini du plan  $yOz$ , la droite ( $\bar{g}$ ) enveloppe une parabole  $\gamma$  tangente à  $O\xi$ ; le cône  $\Gamma$  est donc du second degré. Il est bon de démontrer ce résultat par une méthode encore plus élémentaire, qui a l'avantage de faire découvrir la tangente au sommet de  $\gamma$  et

son foyer F. Le plan perpendiculaire sur Ox mené par S donne sur  $\Sigma$  une génératrice ( $g'$ ): quand ( $g$ ) tend vers ( $g'$ ), sa perspective s'éloigne à l'infini, tout en tendant à devenir parallèle à ( $g'$ ); il existe sur  $\Sigma$  une génératrice ( $g''$ ) perpendiculaire à ( $g'$ ) et le plan  $Sg''$  coupe  $\Sigma$  suivant une génératrice ( $h''$ ) telle que les perspectives ( $\overline{g''}$ ), ( $\overline{h''}$ ) de ( $g''$ ) et ( $h''$ ) coïncident; ( $h''$ ) est de même système que Ox sur  $\Sigma$ , et les génératrices ( $g$ ) découpent sur Ox et ( $h''$ ) deux divisions semblables, de sorte, qu'en perspective, les droites ( $\overline{g}$ ) découpent encore deux divisions homographiques sur ( $\overline{h''}$ ) et la droite de l'infini; en prenant une origine convenable sur ( $\overline{h''}$ ), on donne à cette correspondance homographique la forme

$$\text{tg}(\overline{g}, \overline{h''}) = \frac{2\eta}{p} \quad (2)$$

où  $\eta$  est l'abscisse sur ( $\overline{h''}$ ) du point M commun à ( $\overline{g}$ ) et ( $\overline{h''}$ ) et où  $p$  est une longueur fixe; cela montre que la perpendiculaire à ( $\overline{g}$ ) en M passe par un point fixe F situé à la distance  $\frac{p}{2}$  de ( $\overline{h''}$ ); l'enveloppe est donc une parabole  $\gamma$  ayant ( $\overline{h''}$ ) pour tangente au sommet et F pour foyer. Il est intéressant de montrer que la courbe de contact de  $\Gamma$  et du paraboloidé  $\Sigma$  est une hyperbole; cette courbe est le lieu du point  $R_1$  commun aux deux génératrices ( $g$ ), ( $h$ ) contenues dans un même plan P issu de S; or, le plan  $Sg$  coupe  $\Sigma$  suivant une génératrice ( $h$ ) issue du point d'éloignement  $y$  où le plan  $Sg$  coupe Oy; Oy peut être considérée comme sa propre perspective ou la perspective d'une génératrice ( $h_1$ ) particulière; si on appelle  $x$  l'abscisse de la génératrice ( $g$ ), cette génératrice détermine sur Ox et ( $h_1$ ) deux divisions semblables: la division portée par ( $h_1$ ) devient, par perspective, la division ( $y$ ), de sorte qu'il y a correspondance homographique entre les paramètres  $x$ ,  $y$  des génératrices ( $g$ ), ( $h$ ) situées dans un plan P issu de S; si ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) désignent les coordonnées de S, cette relation est de la forme

$$(x - \xi)(y - \eta) = k \quad (3)$$

comme on le voit en prenant pour plan P le plan perpendiculaire à Ox ou Oy issu de S. Le plan OxS donne d'autre part les valeurs correspondantes du couple ( $x$ ,  $y$ ), à savoir:

$$y = 0 ; \quad \frac{x \sin \varphi \cos \varphi}{h} = \frac{\zeta}{\eta} .$$

Nous en déduisons la valeur de  $k$ ; la relation (3) devient alors

$$x\eta \sin \varphi \cos \varphi + y\xi \sin \varphi \cos \varphi - xy \sin \varphi \cos \varphi - h\zeta = 0 \quad (4)$$

et comme  $R_1$  a pour coordonnées  $\left(x, y, \frac{xy \sin \varphi \cos \varphi}{h}\right)$ , cette équation (4) exprime que  $R_1$  est dans le plan  $\Pi$  d'équation

$$(x\eta + y\xi) \sin \varphi \cos \varphi - h(z + \zeta) = 0 . \quad (5)$$

Le point  $R_1$  décrit la conique commune à ce plan  $\Pi$  et au cône  $\Gamma$ ; cette conique est une hyperbole ayant pour directions asymptotiques les génératrices d'abscisse  $\xi$  ou ordonnée  $\eta$  du paraboloidé  $\Sigma$ ; ces deux génératrices se coupent au point  $M\left(\xi, \eta, \frac{\xi\eta \sin \varphi \cos \varphi}{h}\right)$ .

Le plan  $x = \xi$  est tangent à  $\Gamma$  le long de la génératrice de ce cône parallèle à  $yOz$  et coupe le plan  $\Pi$  suivant une asymptote de l'hyperbole; le plan  $y = \eta$  donne de même l'autre asymptote; ces deux asymptotes se coupent donc en un point  $\omega$  centre de l'hyperbole en jeu; le  $z$  de  $\omega$  est donné par l'équation

$$\frac{2\xi\eta \sin \varphi \cos \varphi}{h} = z + \zeta \quad (6)$$

qui prouve que  $M$  est le milieu de  $S\omega$ ;  $SM\omega$  est parallèle à  $Oz$ , axe de  $\Sigma$ , et le plan de l'hyperbole est parallèle au plan tangent à  $\Sigma$  en  $M$ .

L'équation (1) écrite plus haut peut être considérée comme l'équation de la surface réglée unicursale lieu de la droite  $dd'$  associée à ce cône  $\Gamma$ ; le cône directeur de cette surface est du second ordre et supplémentaire du cône  $\Gamma$ ; chaque droite  $\Delta$  ou  $\Delta'$  est droite (exceptionnelle) double de cette surface réglée; l'équation (4), où l'on remplace  $x$  par  $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$  et  $y$  par  $\frac{b}{\sin^2 \varphi}$ , donne le lieu du point  $R(a, b, o)$  où la droite  $dd'$  perce le plan horizontal  $xOy$ ; on a ainsi l'hyperbole équilatère d'équation

$$ab - a\eta \sin^2 \varphi - b\xi \cos^2 \varphi + \xi\eta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = 0 . \quad (7)$$

La surface réglée est ainsi définie par trois directrices; la droite qui joint les traces de  $\Delta$  et  $\Delta'$  sur le plan de cette hyperbole est une génératrice double de la surface: c'est la droite à l'infini du plan horizontal. Comme vérification si  $S$  vient sur  $\Sigma$ , cette hyperbole se décompose en deux droites.

L'enveloppe  $\Gamma'$  des plans  $P$  parallèles à une direction fixe  $L$  est un cylindre parabolique dont on détermine par le même procédé la trace sur le plan  $yOz$ : c'est une parabole  $\gamma'$  admettant  $Oy$  pour tangente au sommet; la sécante  $dd'$  est assujettie à rester parallèle au plan  $\lambda$  perpendiculaire sur la direction  $L$ , de sorte que le lieu du point  $R$ , comme il a été rappelé au n° 1, est une droite du plan  $xOy$

$$ua + vb + w = 0 . \quad (8)$$



Le point  $R_1$  reste donc dans le plan d'équation

$$ux \cos^2 \varphi + vy \sin^2 \varphi + w = 0 \quad (9)$$

qui coupe le parabolôide  $\Sigma$  ou le cylindre  $\Gamma'$  suivant une parabole. Si la direction  $L$  est perpendiculaire à  $Ox$  (ou  $Oy$ ) le plan  $P$  pivote autour de la génératrice  $(g)$  [ou  $(h)$ ] parallèle à  $L$ .

3. — Dans la théorie élémentaire de la symétrie, on démontre que deux figures  $F_1, F_2$  symétriques d'une même figure  $F$  l'une par rapport à un plan  $Q$ , l'autre par rapport à un point  $O$  du plan  $Q$ , sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite  $A$  perpendiculaire à  $Q$  en  $O$ ; inversement on peut dire que la symétrie relativement à une droite  $A$  résulte de la composition des deux opérations suivantes: symétrie par rapport à un point  $O$  arbitraire de  $A$ , puis symétrie par rapport au plan  $Q$  élevé en  $O$  perpendiculairement à  $A$ .

La symétrique  $\delta$  de  $\Delta$  par rapport à  $A$  coupe  $\Delta'$  en  $d'$ ;  $d'$  est symétrique d'un point  $d$  de  $\Delta$  et  $A$  est perpendiculaire à cette sécante commune  $dd'$  de  $\Delta$  et  $\Delta'$  en son milieu  $S$ ; la réciproque est immédiate. Les droites  $A$  sont donc obtenues par ce procédé qui montre leur réciprocity vis-à-vis de  $\Delta$  et  $\Delta'$  et elles engendrent un complexe qui, nous le verrons, est du second ordre.

On a supposé  $d$  et  $d'$  à distance finie; mais si  $\delta$  est parallèle à  $\Delta'$ , l'axe  $A$  est parallèle à l'une ou l'autre des bissectrices de  $\Delta$  et  $\Delta'$ , c'est-à-dire  $Ox$  ou  $Oy$ , et réciproquement.

Supposons maintenant que  $A$  passe par un point fixe  $S$ : nous remplaçons d'abord  $\Delta$  par sa symétrique  $\bar{\Delta}$  relativement à  $S$ , puis  $\bar{\Delta}$  par sa symétrique  $\delta$  relativement au plan  $Q$  mené par  $S$  perpendiculairement à  $A$ ;  $S$  est donné, donc  $\bar{\Delta}$  est une droite connue et l'enveloppe des plans  $Q$  est le cône  $\Gamma$  relatif aux deux droites  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ ; le lieu des droites  $A$  est le cône, supplémentaire de  $\Gamma$ , ayant pour sommet le point  $S$ ; ce cône est du second degré, le complexe est du second ordre.

Pour trouver l'enveloppe des droites  $A$  situées dans un plan donné  $\Pi$ , il suffit de remarquer que la symétrie autour d'une droite de  $\Pi$  revient à la composition des deux opérations: symétrie relative à  $\Pi$ , puis symétrie relativement au plan  $Q$  mené par cette droite de  $\Pi$  perpendiculairement à  $\Pi$ ; la première symétrie change  $\Delta$  en une droite connue  $\bar{\Delta}$ : la seconde doit transformer  $\bar{\Delta}$  en une droite  $\delta$  coupant  $\Delta'$ , de sorte que le second plan, soit  $Q$ , enveloppe un cylindre parabolique  $\Gamma'$  de génératrices perpendiculaires sur  $\Pi$ , relatif à  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ ; la droite  $A$  admet pour enveloppe la section droite de  $\Gamma'$  par  $\Pi$ . Nous trouverons plus loin, au n° 4, une démonstration plus directe de ce résultat.

Cette étude suppose jusqu'ici le point  $S$  ou le plan  $\Pi$  quelconques; manifestement s'introduit ici un cas particulier, éliminé de parti

pris aux numéros 1 et 2, celui où  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$  sont concourantes ou parallèles.

Si le point S fournit une droite  $\bar{\Delta}$  rencontrant  $\Delta'$ , le plan  $\Delta', \bar{\Delta}$  n'est autre que le plan  $A' X' Y'$  et S est un point *quelconque* du plan  $Oxy$  que nous appellerons R pour retrouver les résultats déjà obtenus; les deux plans  $R\Delta$  et  $R\Delta'$  se coupent suivant une droite  $Rdd'$  coupant  $\Delta$  et  $\Delta'$  à distance finie; le plan P élevé en R perpendiculairement à  $dd'$  donne  $\infty^1$  droites A issues de R dans ce plan: nous appelons  $\Delta_1$  la symétrique de  $\Delta$  relativement à P; la droite A étant tracée dans P, on obtient  $\delta$  en prenant la symétrique de  $\Delta_1$  relativement au plan Q mené par A perpendiculairement à P; ce plan Q est le plan  $Add'$ , de sorte que  $\delta$  décrit, quand A tourne autour de R, le cône de révolution d'axe  $dd'$  dont  $\Delta_1$  est une génératrice. D'autre part, si nous considérons toutes les droites issues de R dans  $xOy$ , la symétrique  $\delta$  de  $\Delta$  par rapport à l'une d'elles, s'obtient en prenant d'abord la symétrique de  $\Delta$  relativement au plan  $xOy$ , ce qui donne dans le plan  $A' X' Y'$  la parallèle  $\bar{\Delta}$  à  $\Delta$  issue de  $A'$ , puis prenant la symétrique de  $\bar{\Delta}$  relativement aux divers plans verticaux passant en R:  $r$  étant la projection de R sur le plan  $A' X' Y'$ , les droites  $\delta$  enveloppent manifestement le cercle décrit dans  $A' X' Y'$  de  $r$  comme centre et tangent à  $\bar{\Delta}$ ; donc le plan  $xOy$  est un second plan lieu de droites A issues de R; ce résultat prouve que toute droite du plan  $xOy$  est droite A.

Supposons de même  $\Pi$  choisi de sorte que  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$  se rencontrent en un point  $d'$  à distance finie:  $\Pi$  est l'un des plans tangents à  $\Sigma$  et n'est parallèle ni à  $yOz$ , ni à  $xOz$ ; il est médiateur d'une sécante commune  $dd'$  de  $\Delta$  et  $\Delta'$ ; les droites A issues du point R milieu de  $dd'$  donnent une première série de droites A du plan  $\Pi$ ;  $\bar{\Delta}$  étant la symétrique de  $\Delta$  relativement à  $\Pi$ , cette droite  $\bar{\Delta}$  joint U trace de  $\Delta$  sur  $\Pi$  au point  $d'$  et les  $\infty^1$  droites A issues de R dans  $\Pi$  donnent comme droites  $\delta$  les génératrices du cône de révolution engendré par  $\bar{\Delta}$  en tournant autour de  $dd'$ ; pour trouver les autres droites A situées dans  $\Pi$  remarquons qu'ici la droite  $\delta$  est assujettie à être symétrique de  $\bar{\Delta}$  relativement à un certain plan Q perpendiculaire sur  $\Pi$  et, de plus, à rencontrer  $\Delta'$ ; elle rencontre aussi  $\bar{\Delta}$  de sorte qu'elle doit ou passer par le point  $d'$  commun à  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ , cas déjà élucidé, ou bien être contenue dans le plan  $\bar{\Delta}, \Delta'$ : le plan Q, dans ce second cas, doit être perpendiculaire au plan  $(\bar{\Delta}, \delta)$  ou  $(\bar{\Delta}, \Delta')$  et par suite à l'intersection de  $\Pi$  et  $(\bar{\Delta}, \Delta')$ : cette intersection n'est autre que la droite  $UU'$  joignant les traces U et  $U'$  de  $\Delta$  et  $\Delta'$  sur le plan  $\Pi$ ; la droite A, trace de Q sur  $\Pi$ , doit être perpendiculaire dans  $\Pi$  à  $UU'$ , donc, d'après ce que nous avons vu au n° 2, parallèle à la droite  $RR_1$  joignant R au point de contact  $R_1$  de  $\Pi$  et  $\Sigma$ : nous avons vu à ce moment que la droite  $RR_1$  elle-même fournit une droite  $\delta$  passant par  $d'$  et contenue dans le

plan  $(\bar{\Delta}, \Delta')$ . Or, quand on prend les symétriques d'un point F par rapport à deux droites parallèles L et L<sub>1</sub>, les symétriques dérivent l'un de l'autre par une translation équipollente au double de l'un des segments perpendiculaires à L et L<sub>1</sub>; donc quand on remplace la droite RR<sub>1</sub> par une parallèle à RR<sub>1</sub> tracée dans le plan  $\Pi$ , la droite  $\delta$  subit une translation parallèle à UU': elle reste donc bien dans le plan  $\bar{\Delta}, \Delta'$ .

Si  $\Pi$  est parallèle à  $yOz$ , A est ou bien l'une des parallèles à Oy menées dans  $\Pi$  ou bien l'une des perpendiculaires menées dans  $\Pi$  à la droite joignant les traces U et U' de  $\Delta$  et  $\Delta'$  sur  $\Pi$ . De même pour un plan  $\Pi$  parallèle à  $xOz$ .

Revenons maintenant au cas où  $\Delta'$  et  $\bar{\Delta}$  (relative à S ou à  $\Pi$ ) ne sont pas concourantes et cherchons les conditions nécessaires pour que le cône lieu des droites A relatives au point S ou l'enveloppe des droites A relatives au plan  $\Pi$  se décompose.

Le cône lieu des droites A issues d'un point S se décompose en deux plans si l'enveloppe des plans Q issus de S et relatifs à  $\bar{\Delta}, \Delta'$  se compose de deux droites, c'est-à-dire si S est équidistant de  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ : puisque S est équidistant de  $\Delta$  et  $\bar{\Delta}$ , la condition nécessaire et suffisante est que S soit sur  $\Sigma$ ; soient  $(\xi, \eta, \zeta)$  les coordonnées de S; d'après ce que nous avons vu plus haut, le plan P relatif au point R  $(a, b, o)$  contient la génératrice (g) d'abscisse  $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$ , de sorte que toute droite joignant un point de la droite  $x = a$  de  $xOy$  à un point de la génératrice (g) d'abscisse  $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$  est une droite A; donc les droites A issues du point S de  $\Sigma$  sont contenues dans deux plans Q<sub>1</sub>, Q<sub>2</sub> contenant S: Q<sub>1</sub> contient la droite d'abscisse  $\xi \cos^2 \varphi$  du plan  $xOy$ , Q<sub>2</sub> la droite d'éloignement  $\eta \sin^2 \varphi$  du plan  $xOy$ .

Cherchons maintenant l'enveloppe des droites A contenues dans un plan  $\Pi$  non tangent à  $\Sigma$ ; on forme le paraboloidé  $\bar{\Sigma}$  relatif à  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ ; le cylindre  $\Gamma'$  de génératrices parallèles à la direction  $\pi$  perpendiculaire à  $\Pi$  ne se décompose que si  $\pi$  est parallèle à un plan directeur de  $\bar{\Sigma}$ , autrement dit, fait des angles égaux avec  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta'$ ; or  $\pi$  fait des angles égaux avec  $\bar{\Delta}$  et  $\Delta$ , de sorte que la condition nécessaire et suffisante est que  $\pi$  fasse des angles égaux avec  $\Delta$  ou  $\Delta'$ , ou que  $\Pi$  soit parallèle à Ox ou Oy; supposons  $\Pi$  parallèle à Oy et soit a l'abscisse de la trace de  $\Pi$  sur  $xOy$ ; d'après ce que nous avons vu, soit S le point où  $\Pi$  perce la génératrice (g) d'abscisse  $\frac{a}{\cos^2 \varphi}$ : toutes les droites issues de S dans  $\Pi$  sont des droites A; d'autre part toutes les parallèles à Oy tracées dans  $\Pi$  sont une autre série de droites A.

Je signale rapidement les cas plus particuliers: S peut coïncider avec O et alors le cône lieu des droites A issues de O se réduit au plan  $xOy$  pris deux fois. S coïncidant avec le point à l'infini de Ox ou Oy,



toute droite issue de ce point est droite A. Au point de vue analytique, on doit considérer toute droite du plan de l'infini comme droite A, car l'enveloppe des droites A d'un plan arbitraire est une parabole, courbe tangente à la droite de l'infini du plan en jeu. — Si le plan  $\Pi$  coïncide avec  $xOy$ , toute droite de  $xOy$  est droite A. Si le plan  $\Pi$  est parallèle à  $xOy$ , sans coïncider avec lui, les droites A de ce plan sont les parallèles à  $Ox$  ou  $Oy$  de ce plan.

Cherchons maintenant les droites A parallèles à une direction donnée L (si L est la direction  $Ox$ , ou  $Oy$ , toute parallèle à cette direction est une droite A). Si la direction L est parallèle à  $xOy$ , toutes les parallèles à cette direction, contenues dans le plan  $xOy$ , sont des droites A et il n'y a pas d'autre droite A parallèle à L, comme on le voit aussitôt d'après la relation géométrique simple existant entre les symétriques d'une même droite par rapport à deux droites parallèles. Supposons donc la direction L quelconque et soit une droite A parallèle à L: elle perce le plan  $xOy$  en un point unique R, à distance finie; la sécante  $Rdd'$  commune à  $\Delta$  et  $\Delta'$  issue de R est parallèle au plan  $\lambda$  perpendiculaire à L: donc le point R (remarque du début au n° 1) admet pour lieu une droite  $l$  du plan  $xOy$  et réciproquement à tout point R de cette droite  $l$  correspond un plan P parallèle à L, contenant une droite A parallèle à L issue de R; le lieu de ces droites A est donc le plan  $\Pi$  mené par  $l$  parallèlement à L (ces deux droites déterminent bien un plan, car L n'est pas parallèle à  $xOy$ ); il est facile de vérifier que ce plan  $\Pi$  est un plan P; car parmi les droites  $Rdd'$ , il y en a une,  $R^0 d^0 d'^0$  qui est perpendiculaire à  $\Pi$ : or le plan  $\Pi$  contient le milieu  $R_0$  de cette sécante, c'est donc un plan P particulier. — On retrouve un résultat établi directement au n° 2: il s'agit de trouver l'enveloppe des plans P parallèles à une direction donnée L: quand le point R décrit la droite  $l$  du plan  $xOy$ , le plan P, relatif à R, médiateur de  $dd'$ , reste parallèle à L et le point  $R_1$  décrit une section plane de  $\Sigma$  qui est une parabole: le cylindre  $\Gamma'$  ayant cette parabole comme base, et ses génératrices parallèles à L est l'enveloppe des plans P. La droite  $R^0 R_1^0$  est parallèle à L et tangente à  $\Sigma$  en  $R_1^0$ ; si  $(a, b, o)$  sont les coordonnées de  $R^0$ , les paramètres directeurs de  $R^0 R_1^0$  sont

$$\frac{a \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \frac{b \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad \frac{ab}{h \sin \varphi \cos \varphi}.$$

En désignant par  $\alpha, \beta, \gamma$  les paramètres directeurs de L, qui sont proportionnels à ceux de  $R^0 R_1^0$ , on trouve aussitôt pour  $R^0$  les coordonnées

$$a = \frac{h \cos^3 \varphi}{\sin \varphi} \frac{\gamma}{\beta}, \quad b = \frac{h \sin^3 \varphi}{\cos \varphi} \frac{\gamma}{\alpha}$$

et pour  $R_1^0$  les coordonnées

$$\frac{h \cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\gamma}{\beta}, \quad \frac{h \sin \varphi}{\cos \varphi} \frac{\gamma}{\alpha}, \quad h \sin \varphi \cos \varphi \frac{\gamma^2}{\alpha \beta}$$

dont les deux premières donnent l'abscisse de la génératrice ( $g$ ) contenue dans  $\Pi$  ou l'éloignement de la génératrice ( $h$ ) contenue aussi dans  $\Pi$ .

4. — Nous avons vu que par chaque droite  $A_0$  il passe un premier plan  $P_1$  obtenu en prenant la trace  $R$  de  $A_0$  sur  $xOy$ , menant par  $R$  la sécante commune  $dd'$  à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , puis élevant en  $R$  le plan perpendiculaire à  $dd'$ ; dans ce plan  $P_1$  particulier, il y a deux séries de droites  $A$ : les unes concourantes en  $R$ , les autres parallèles à  $RR_1$ ; la droite  $A_0$  appartient à la première catégorie.

D'autre part, le lieu des droites  $A$  parallèles à  $A_0$  est un second plan, soit  $P_2$ , contenant  $A_0$ ; dans ce plan  $P_2$ , comme pour  $P_1$ , il y a deux catégories de droites  $A$  et cette fois la droite  $A_0$  appartient à la catégorie des droites parallèles.

Nous avons établi au n° 2 qu'il y a 2, 1, 0 plans  $P$  passant par une droite donnée quelconque (non génératrice de  $\Sigma$ ), ici nous les avons trouvés chacun séparément (et par suite rationnellement); l'équation du second degré  $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$ , à laquelle se ramènerait le problème, jouit de cette particularité que  $B^2 - AC$  est un carré parfait.

Il est bon de différencier le rôle des plans  $P_1$  et  $P_2$  d'une façon nouvelle, qui nous donne d'ailleurs une construction plus simple de  $P_2$ ;  $\delta$  étant la symétrique de  $\Delta$  par rapport à  $A_0$ , nous avons montré, au n° 2, que la symétrique de  $\Delta$  par rapport à tout plan  $\Pi$  issu de  $A_0$  rencontre à la fois  $\Delta$  et  $\delta$ : or si le plan  $\Pi$  devient plan  $P$ , la symétrique  $\Delta_1$  de  $\Delta$  relativement à  $P$  doit rencontrer non seulement  $\delta$  mais encore  $\Delta'$ :  $d'$  étant le point commun à  $\delta$  et  $\Delta'$ ,  $\Delta_1$  doit ou passer par  $d'$  ou être située dans le plan  $(\delta, \Delta')$ ;  $P_1$  correspond à la première hypothèse,  $P_2$  à la seconde; inutile de revenir sur le raisonnement complet, qui a déjà été fait, pour ce plan  $P_2$ ; remarquons simplement que  $\Delta_1$  rencontre  $\Delta$  en un point situé dans le plan  $(\delta, \Delta')$ ; si donc  $U$  est ce point, connu dès que  $A_0$  est donné, le plan  $P_2$  est le plan déterminé par  $A_0$  et  $U$ ; la vérification est immédiate, car la symétrique de  $\Delta$  relativement à ce plan passe en  $U$  et rencontre  $\delta$ , elle est donc dans le plan  $(U, \delta)$  qui n'est autre que le plan  $(\delta, \Delta')$ , donc elle rencontre bien  $\Delta'$  et le plan  $P_2$  est bien plan  $P$ . Remarquons que cette détermination de  $P_2$  est en défaut si  $A_0$  rencontre  $\Delta$ ; mais alors, comme une droite  $A$  ne peut rencontrer simultanément  $\Delta$  et  $\Delta'$ , il suffit d'intervertir les rôles de  $\Delta$  et  $\Delta'$ : nous avons donc retrouvé ce qui a été expliqué au n° 2, sur le plan  $P$  général et les droites  $UU'$  et  $RR_1$  correspondantes.

Les droites  $A$  particulières pour lesquelles les deux plans  $P_1$  et  $P_2$  sont confondus sont les droites  $RR_1$ : le plan tangent à  $\Sigma$  en  $R_1$  est le plan double  $P$ ; et en effet dans ce plan, la droite  $RR_1$  appartient simultanément aux deux classes de droites  $A$  de ce plan.

Comme le problème: trouver les plans  $P$  issus d'une droite  $L$ , revient au problème: trouver les points communs à  $L$  et à  $\Sigma$ , nous avons à vérifier que pour une droite  $A_0$  donnée, le second problème se résoud rationnellement; il suffit de prendre le pied  $R(a, b, c)$  de  $A_0$  sur  $xOy$  et de couper  $A_0$  par le plan  $x = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$ , puis par le plan  $y = \frac{b}{\sin^2 \varphi}$ .

Supposons maintenant que la droite  $A$  varie dans un plan donné  $\Pi$ : elle enveloppe une parabole  $\gamma$ ; sa trace sur  $xOy$  décrit une droite  $(l)$ ; donc la sécante  $Rdd'$  commune à  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et  $(l)$  reste parallèle à un plan fixe  $Q$  et le plan  $P_1$ , perpendiculaire sur  $dd'$  en  $R$ , reste parallèle à la direction  $(q)$  perpendiculaire sur  $(Q)$ .

D'autre part, menons le plan  $\Pi_1$  tangent à  $\Sigma$  et parallèle à  $\Pi$ : il suffit pour cela de construire la sécante commune  $dd'$  à  $\Delta$  et  $\Delta'$ , perpendiculaire à  $\Pi$ ; une droite  $A$  quelconque, soit  $A_0$ , étant menée dans  $\Pi$ , menons par  $R$ , milieu de  $dd'$ , la parallèle  $A_1$  à  $A_0$ ;  $A_1$  est perpendiculaire à  $dd'$ , c'est donc une droite  $A$  particulière: donc le plan  $A_0 A_1$  est le second plan  $P_2$  mené par  $A_0$ ; ce plan passe par le point  $R$  qui ne dépend pas du choix de  $A_0$  dans  $\Pi$ : la proposition est donc démontrée. Nous voyons même que  $R$  reste le même pour les divers plans  $\Pi$  parallèles entre eux: mais alors cette remarque prouve aussitôt que l'enveloppe des droites  $A$  contenues dans un plan  $\Pi$  donné est une parabole, car c'est la trace sur  $\Pi$  du cône  $\Gamma$  circonscrit à  $\Sigma$  d'un point, non plus quelconque, mais placé dans  $xOy$ ; les enveloppes relatives aux divers plans parallèles à  $\Pi$  sont homothétiques entre elles par rapport à  $R$  et c'est ce qui explique pourquoi la parabole relative à  $\Pi_1$  se réduit à deux points, dont l'un est  $R$ , l'autre étant le point à l'infini sur la génératrice de contact de  $\Pi_1$  et du cône  $\Gamma$ , droite qui est la droite  $RR_1$  indiquée plus haut.