

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Rubrik:** MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### A propos d'une Note de M. Lainé « Sur quelques classes particulières de polynomes ».

Dans sa Note intitulée « Sur quelques classes particulières de polynomes » (*Enseign. math.* 25, 1926, p. 191-196; nous citerons ce travail par E. M.), M. LAINÉ a étudié, entre autres, les polynomes de degré  $n$  qui satisfont à l'équation différentielle

$$(x^2 + 1)y'' + (2(1 - a)x + b)y' - n(n + 1 - 2a)y = 0 \quad (a)$$

$(a, b \text{ réels, } b \neq 0) .$

Nous allons montrer que ces polynomes se déduisent des polynomes de JACOBI à l'aide d'une transformation simple, et que, de même, les formules (8) et (9) (*E. M.*, p. 194, 195) sont la conséquence d'une identité trouvée par le même auteur (*Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe*, Crelles Journal für reine und angewandte Mathematik 56, 1859; *Gesammelte Werke* Bd. 6, p. 184 et suiv.). M. Lainé s'est borné au domaine réel.

Nous posons

$$x = -2i\xi + i; \quad \xi = \frac{ix + 1}{2}, \quad (b)$$

de sorte que l'équation différentielle  $a)$  devient une équation différentielle hypergéométrique dont les paramètres ont les valeurs

$$\alpha = 1 - 2a + n; \quad \beta = -n; \quad \gamma = 1 - a - \frac{ib}{2}. \quad (c)$$

Celle-ci, pourvu que  $\gamma$  soit  $\neq 0, -1, -2 \dots$ , a pour intégrale particulière le polynome

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = G_n\left(1 - 2a, 1 - a - \frac{ib}{2}, \xi\right), \quad (d)$$

où  $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$  désigne la série hypergéométrique de Gauss, et  $G_n(p, q, \xi)$  le  $n$ -ième polynôme de Jacobi (pour la notation voir COURANT-HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik*, Berlin 1925, p. 74-75). D'après Jacobi (loc. cit., équation (7)), on a

$$\begin{aligned} & \gamma(\gamma + 1) \dots (\gamma + n - 1) F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \\ &= (\xi(1 - \xi))^a \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right)^{\frac{ib}{2}} \frac{d^n}{d\xi^n} \left[ (\xi(1 - \xi))^{n-a} \left(\frac{\xi}{1 - \xi}\right)^{\frac{-ib}{2}} \right] \quad (e) \end{aligned}$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  ont la signification  $c)$ . En vertu de  $b)$  et de la formule connue

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{2i} \operatorname{lg} \frac{1 + ix}{1 - ix},$$

on peut donner à l'expression  $e)$  la forme  $f)$

$$\left(\frac{-i}{2}\right)^n (x^2 + 1)^a e^{-b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 + 1)^{n-a} e^{b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} = \left(\frac{-i}{2}\right)^n \prod_n(x)$$

en utilisant la définition (8) de M. Lainé. Les équations  $e)$  et  $f)$  nous montrent alors pour  $a = \frac{n+1}{2}$ , que, en ce cas,  $\Pi_n(x)$  prend la valeur constante

$$P_n = (2i)^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{n-1}{2} - \frac{ib}{2} + k\right) = \prod_{k=0}^{n-1} (b + i(2k - (n-1))) ,$$

donc pour  $n = 2\nu$  pair

$$\begin{aligned} P_{2\nu} &= \prod_{k=0}^{\nu-1} [b + i(2k - (2\nu - 1))] [b - i(2k - (2\nu - 1))] \\ &= \prod_{m=1}^{\nu} (b^2 + (2m - 1)^2) \end{aligned}$$

et pour  $n = 2\nu + 1$  impair

$$P_{2\nu+1} = b \prod_{k=0}^{\nu-1} (b + i(2k - 2\nu)) (b - i(2k - 2\nu)) = b \prod_{m=1}^{\nu} (b^2 + 4m^2) .$$

Ce sont les formules (9) de la Note de M. Lainé (*E. M.*, p. 195).

Enfin, il résulte facilement des « Relations inter functiones contiguas » de GAUSS (*Disquisitiones generales circa seriem infinitam*

$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \dots$ ; *Commentationes societatis Gottingensis recent.* Bd. 2, 1813; *Werke* Bd. 3, p. 125 et suiv.) [1], [2], [7], qu'on a

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta - \alpha + 1)(\gamma - \beta) F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, \xi) \\ & \quad + \beta(\beta - \alpha - 1)(\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \beta + 1, \gamma, \xi) \\ & + (\beta - \alpha) [\gamma(\beta + \alpha - 1) - 2\alpha\beta - (\beta - \alpha - 1)(\beta - \alpha + 1)\xi] F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 0, \end{aligned}$$

et quand on y pose

$$\alpha = n + p; \quad \beta = -n; \quad \gamma = q,$$

on trouve pour les polynomes de Jacobi la formule de récurrence

$$\begin{aligned} & (n + p)(n + q)(2n + p - 1) G_{n+1}(p, q, \xi) \\ & \quad + n(2n + p + 1)(n + p - q) G_{n-1}(p, q, \xi) \\ & + (2n + p)((p - 1)q + 2n(n + p) - (2n + p - 1)(2n + p + 1)\xi) G_n = 0. \end{aligned}$$

En y introduisant les valeurs (b), (c) et la notation  $\Pi_n(x)$  de M. Lainé, on retrouve sa dernière formule (p. 196). On constate ainsi que cette formule est une conséquence presque immédiate de relations classiques bien connues.

Jena, 18.IV.1929.

Hermann SCHMIDT.