Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Gino Loria. — **Histoire des Sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique** (Collection « Science et Civilisation » publiée sous la direction de Maurice Solovine). — Un volume in-8° de 215 pages avec figures et une planche hors texte. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

C'est un livre de profonde érudition et cependant d'une lecture charmante que cette histoire de la science hellène. Cette histoire commence d'ailleurs avant les Grecs, notamment avec le fameux *Papyrus Rhind* des Egyptiens, mais de tels prédecesseurs étaient surtout d'esprit utilitaire; les Grecs seuls cultivèrent la Géométrie comme on cultive des fleurs. Ce sont d'abord Thalès, Pythagore, Zénon, Œnodipe, Hippias, ...; autour des grandes lignes, M. Gino Loria nous révèle une foule de choses généralement inconnues mais du plus puissant intérêt, telles la quadratrice d'Hippias d'Elis, imaginée au Ve siècle avant J.-C. dans des conditions de transcendance vraiment extraordinaires pour l'époque. Puis voici Hippocrate de Chios (qu'il ne faut pas confondre avec le médecin) et ses quadratures circulaires partielles conduisant à des lunules construites sur les côtés d'un triangle rectangle. Chose bizarre, il me semblait avoir appris — je ne saurais dire où — que ces considérations lunulaires étaient dues à Hipparque, mais je n'hésite pas un instant à changer d'opinion, tout en remerciant M. Loria pour la correction qu'il apporte à mon érudition. L'académique Platon, avec Dieu géomètre, est bien près de l'esprit moderne. Eudoxe et le Problème de Délos nous conduisent à l'Age d'Or de la Géométrie grecque. Suit un magnifique chapitre qui débute par Euclide, se continue avec Archimède, Apollonius et conduit à examiner le rôle des contemporains et continuateurs de ces grands génies. Cet examen est délicat, mais c'est avec une sûreté remarquable que M. Loria analyse Eratosthène, Nicomède, Dioclès, Persée, Zénodore, Geminus, Théon de Smyrne, Pappus d'Alexandrie, Eutocius, Serenus. L'Arithmétique des Grecs, leur Logistique, les influences de Pythagore et de Platon, Nicomaque de Gérase, Théon de Smyrne, Jamblique, Domninos de Larissa, Diophante d'Alexandrie, sont magistralement dépeintes. Là encore il y a de l'extraordinaire comme dans le fameux problème des Bœufs du Soleil lié au nom d'Archimède et aussi à une équation de Pell dont la solution *minima* conduit à un nombre s'exprimant par les chiffres 7766 suivis de 206541 zèros ! L'Astronomie n'est pas oubliée, non plus que les rapports de l'esprit grec avec les mathématiques d'aujourd'hui. Archimède ne s'est pas effrayé du *concept si dangereux d'infini* (p. 201) mais, dangereux ou non, ce qui éclate surtout dans cette belle exposition c'est bien ce que Renan appelait avec raison *le miracle grec*.

N'oublions pas de signaler la planche hors texte. Elle représente, d'après une fresque récemment découverte à Pompéi, un esclave manœuvrant une

vis d'Archimède. L'artiste a-t-il voulu attirer l'attention sur la machine, sur le rôle de l'esclave ou sur tout un décor assez compliqué ? Les réflexions que l'on peut faire sur ces sujets sont toutes pleines d'intérêt.

A. Buhl (Toulouse).

Louis Roy. — **Problèmes de Statique graphique et de Résistance des matériaux,** à l'usage des Elèves de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée et des Candidats au Certificat de Mécanique appliquée. — Un volume de viii-118 pages, 48 figures et quatre planches. Prix: 30 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

M. Louis Roy, indépendamment de ses travaux scientifiques proprement dits qui en font un continuateur des Duhem et des Boussinesq, s'est voué, avec un égal bonheur, à l'enseignement de la Mécanique considérée plus particulièrement quant aux réalisations techniques relevant de l'Art de l'ingénieur. D'où, tout d'abord, deux volumes, consacrés l'un à la Mécanique rationnelle généralement adjointe aux Mathématiques générales, l'autre à la Statique graphique et à la Résistance des Matériaux. Ces ouvrages ont été analysés ici-même (T. XXII, 1921-22, pp. 92 et 232). C'est le second qui est illustré maintenant par des *Problèmes* formant un recueil très suggestif car, si les exercices ainsi assemblés sont, considérés en eux-mêmes, plutôt élémentaires, l'assemblage est propre à forcer l'attention sur tous les principes essentiels d'une science délicate dont la pratique implique souvent de redoutables responsabilités. De plus, l'esprit d'un véritable savant n'est nullement superflu pour insérer convenablement l'élémentaire dans une discipline qui tient malgré tout aux équations générales de la théorie élastique et recèle ainsi de nombreuses et grandes difficultés.

Il est évidemment impossible d'analyser ici les 46 problèmes de l'ouvrage. Les 16 premiers forment trois chapitres de Statique graphique; les autres ont trait aux déformations les plus diverses, aux poutres, aux potences, aux arcs chargés, aux phénomènes de flambement qu'il faut savoir éviter de manière aussi élégante et économique que possible, notamment sans trop augmenter l'épaisseur des pièces. L'un de ces exercices contient une formule relative à la flexion des tubes de télescope; cette formule a été étudiée sur un télescope réel, habituellement manié par l'auteur. Beaucoup d'autres questions se rapportent à des expériences faites ou pouvant aisément être faites dans un Institut de Mécanique tel que celui de l'Université de Toulouse. L'ouvrage est très original et très consciencieux; les calculs numériques y sont toujours terminés. S'il a été publié à la demande des élèves immédiats de M. Louis Roy, nul doute qu'il ne s'impose partout par son utilité et son intérêt.

A. Buhl (Toulouse).

Rolf Nevanlinna. — **Le Théorème de Picard-Borel et la Théorie des Fonctions méromorphes** (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de viii-174 pages. Prix: 35 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

Il s'agit ici d'extensions, à la théorie des fonctions méromorphes, de théorèmes célèbres découverts d'abord dans la théorie des fonctions entières. L'instrument fondamental de recherche est la formule de Poisson-Jensen

qui permet de calculer le module d'une fonction méromorphe dans un cercle lorsque l'on connaît ses valeurs sur la circonférence ainsi que ses zéros et ses pôles intérieurs au cercle. M. Rolf Nevanlinna a tenu à commencer par le commencement; il déduit la formule de Poisson-Jensen de la formule de Green. Plus antérieurement encore on pourrait déduire la formule de Green de l'identité qui existe entre l'intégrale simple de XdY étendue à un contour fermé C et l'intégrale double de $dX\,dY$ relative à l'étendue contenue dans C. C'est le point de vue avec lequel j'ai abordé les Formules stokiennes, le Calcul différentiel absolu, les Groupes, ...; que ne contient-il pas ?

Venons à l'équation $f(x) = z$ quand f est une fonction méromorphe; il s'agit surtout d'étudier l'existence et la distribution des racines pour diverses valeurs de z. Deux expressions $N(r, z)$ et $m(r, z)$, immédiatement associables à la formule de Jensen, sont relatives, l'une à la densité des racines de $f = z$ au voisinage du point à l'infini, l'autre à une certaine valeur logarithmique moyenne sur la circonférence $|x| = r$. Un premier théorème fondamental (p. 12) lie N et m à une fonction $T(r, f)$ croissante et convexe de $\log r$. Notamment, pour $m + N$ borné, avec r infini, f se réduit à une constante.

D'autres expressions M et n s'adjoignent bientôt aux précédentes et permettent de généraliser les théorèmes de M. Hadamard sur la croissance des fonctions entières; du même coup, la notion d'*ordre* s'étend à une fonction méromorphe. Il est entendu que toute fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières; on voit bientôt (p. 39) des hypothèses permettant de réaliser immédiatement cette construction. La notion de *genre* s'étend bientôt aussi et tout ceci ne va pas sans considérations générales sur les produits canoniques, considérations attachées aux beaux travaux de M. Valiron.

Le chapitre consacré au « Second théorème fondamental » est certainement celui dont l'étude est la plus laborieuse. Les théorèmes initiaux de MM. Hadamard et Borel y sont remplacés par un lemme donnant une limite supérieure de la valeur moyenne qui mesure l'intensité de la convergence vers l'infini de la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe donnée. On revient d'ailleurs, dans cet ordre d'idées, à la somme $m + N$. L'union de la *valeur exceptionnelle* à la *valeur asymptotique* conduit à la courbe continue allant à l'infini et telle que la fonction tende vers la valeur considérée lorsque x s'éloigne indéfiniment en suivant cette courbe. On sait aujourd'hui rechercher, de façon naturelle et méthodique, les circonstances qui semblèrent si paradoxales lorsque Mittag-Leffler annonça la construction de fonctions entières finies à l'infini le long de tous les rayons issus de l'origine. Seulement, depuis, les méthodes ont bien changé et c'est avec quelque mélancolie que l'on constate que le nom de Mittag-Leffler ne figure pas dans la Bibliographie terminant l'ouvrage; on y trouve, il est vrai, celui de A. Wiman, l'un de ses disciples les plus directs.

Bornons-nous à mentionner les deux derniers Chapitres sur les « Fonctions méromorphes liées par une relation linéaire » et sur les « Fonctions méromorphes dans un cercle fini ». Une note « Sur l'emploi de certaines fonctions automorphes » montre que les idées initiales de M. Emile Picard ont gardé toute leur fécondité malgré l'extrême diversité des recherches ultérieures. Ceci semble être aussi l'opinion donnée par M. G. Julia dans ses *Leçons sur les Fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé.*

Revenons à la Bibliographie des dernières pages; elle est de première valeur, elle n'oublie point des jeunes tels MM. A. Bloch et H. Milloux, elle aurait pu être un peu plus complète encore en citant notamment la belle thèse de M. Henri Cartan *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires lacunaires*, thèse qui semble étroitement apparentée à ce qui précède, s'inspire constamment des méthodes de MM. F. et R. Nevanlinna et s'appuie ainsi sur la formule de Jensen. Mais, bien que l'ouvrage de M. Rolf Nevanlinna porte 1929 comme date de publication, le savant auteur a arrêté son travail en novembre 1927, comme il est indiqué à la fin de la Préface, et la thèse de M. Henri Cartan est de 1928. Ma remarque ne s'inspire donc que du plaisir de signaler une belle adjonction à une exposition, des plus suggestives, qui en entraînera sans doute bien d'autres.

A. Buhl (Toulouse).

N.-E. Nörlund. — **Leçons sur les Equations linéaires aux différences finies,** rédigées par René Lagrange (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions publiée sous la direction de M. Emile Borel). — Un volume gr. in-8° de vi-153 pages. Prix: 50 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris. 1929.

M. Nörlund jouit, quant au Calcul des Différences, d'une célébrité bien méritée. Nous avons déjà analysé (T. XXV, 1926, p. 145) ses *Vorlesungen über Differenzenrechnung* et (T. XXVI, 1927, p. 338) son fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* intitulé *Sur la « Somme » d'une fonction.*

Il y a là une analyse du discontinu qui se ramène au continu, aux solutions analytiques, aux séries de « facultés » remontant à Laplace et même aux fractions dites *continues*. Henri Poincaré et Salvatore Pincherle s'y sont grandement intéressés; G. D. Birkhoff et R. D. Carmichael ont donné des méthodes d'approximations successives donnant aux équations aux différences une importance analogue à celle que de telles méthodes ont donné aux équations différentielles ordinaires. C'est ainsi que le présent ouvrage commence par étudier l'existence des solutions, les systèmes *fondamentaux* que forment celles-ci quand elles ne sont point liées par de certaines relations linéaires à coefficients *périodiques*, les conditions d'analyticité et même de méromorphie quand l'équation initiale est à coefficients rationnels. Les équations linéaires aux différences admettent d'ailleurs une équation *adjointe;* on les traite aisément avec second membre quand elles sont d'abord résolues sans celui-ci; on abaisse leur ordre quand on connaît des solutions et les séries de facultés sont justement ce qui permet de faire, pour les équations en litige, une théorie analogue à celle de Fuchs et Frobenius. Quant aux termes des séries de facultés ce sont des quotients de fonctions Γ, si bien que la fonction Γ qui, rappelons-le, ne satisfait à aucune équation différentielle ordinaire à coefficients algébriques, apparaît, par contre, comme l'instrument fondamental de la théorie des équations aux différences finies.

Un premier grand théorème (p. 44) nous montre qu'il y a *des séries de séries* de facultés dépendant de constantes ρ_s racines d'une équation déterminante, avec des facteurs contenant x et ρ_s et des dérivées partielles d'aspect taylorien en ρ_s, ces séries de séries étant propres à représenter

les systèmes fondamentaux de solutions. On croirait voir ici une sorte de réplique de la Théorie des Groupes finis et continus avec les paramètres des groupes paramétriques, le groupe adjoint et l'équation caractéristique. Ce serait peut-être un beau travail que celui qui fixerait de telles analogies.

Pour les équations linéaires dont les coefficients sont des polynomes, on forme des solutions canoniques en partant d'une intégrale définie déjà considérée par Laplace; on retombe après coup, quoique très rapidement, sur les séries de facultés. Deux systèmes canoniques de solutions peuvent être linéairement liés par des variations de contours d'intégration intéressant l'intégrale précédente.

Quant aux résolutions par approximations successives, elles ne vont point sans considérations concernant la croissance des solutions.

Les systèmes d'équations admettent aussi des systèmes adjoints, l'adjonction se décomposant en une sorte de correspondance réciproque d'éléments à éléments.

M. G. D. Birkhoff a donné une importante méthode de résolution par limites de déterminants de même origine matricielle; ces limites sont propres à l'examen des questions d'analyticité.

La théorie est d'une grande élégance. Certes les méthodes approximatives et inégalitaires ont quelque chose du caractère pointilleux qu'on n'enlèvera jamais à de telles méthodes, mais elles n'ont cela que partiellement. Les belles formules, à symétrie remarquable, abondent véritablement. L'œuvre est caractérisée par beaucoup de soin et d'art. Elle a d'ailleurs été rédigée par M. René Lagrange dont l'éloge n'est plus à faire; le jeune et brillant géomètre, Maître de Conférences à Lille lors de la rédaction et Professeur à Dijon lors de la publication, a certainement laissé l'empreinte de son talent personnel en toutes ces belles pages.

A. Buhl (Toulouse).

G. Vivanti. — **Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen.** Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen von Friedrich Schwank. — Un vol. in-8° de 296 pages; broché, R.M. 15.60, relié 16,60; Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover, 1929.

L'ouvrage de M. Vivanti, dont l'édition originale parue en 1916 a été analysée ici-même par M. Plancherel, n'a pas besoin d'être recommandé aux lecteurs de l'*Enseignement Mathématique*. Très apprécié dans les milieux universitaires, ce livre est certainement l'un des plus clairs qu'on ait écrits sur la théorie des équations intégrales. La traduction allemande, qui vient de paraître, nous semble excellente. M. Schwank a eu soin de rectifier quelques inexactitudes qui s'étaient glissées dans l'édition originale; il y a ajouté d'autre part quelques exemples nouveaux, des notes et des indications intéressantes sur des recherches plus récentes et des problèmes qui n'ont pas été abordés dans l'édition italienne. Une liste bibliographique des plus complètes, déjà longue dans l'édition de 1916 et qui maintenant occupe trente pages, donne les titres des ouvrages, thèses et mémoires publiés avant 1928. Nous ne doutons pas que le livre de M. Vivanti, ainsi complété, ne rende de grands services aux étudiants en mathématiques et à tous ceux qui désirent acquérir des vues d'ensemble sur la théorie des équations intégrales.

D. Mirimanoff (Genève).

L. Tonelli. — **Serie trigonometriche.** — Un vol. in-8° de 526 pages; Lires 100; N. Zanichelli, Bologna, 1928.

La théorie des séries trigonométriques a, depuis la publication des *Leçons sur les Séries trigonométriques* de M. H. Lebesgue, été l'objet de si nombreuses recherches et fait de tels progrès qu'une exposition systématique et didactique de l'ensemble des résultats obtenus était devenue nécessaire. M. E. W. Hobson en a donné une en anglais dans le second tome de son monumental ouvrage: *Theory of functions of a real variable* (2 éd. Cambridge, University Press, 1926). M. Tonelli en donne une seconde dans l'ouvrage qu'il vient de publier chez Zanichelli.

M. Tonelli a voulu que son livre ou tout au moins certains chapitres pussent être lus par un débutant; il a voulu, d'autre part, que le livre contint un exposé des progrès les plus importants de la théorie et fut utile aux chercheurs. Je crois pouvoir affirmer que ce double but est largement atteint. Cependant, sur certains points, M. Tonelli a du se restreindre, pour ne pas augmenter démesurément le nombre des pages. C'est ainsi qu'il s'excuse dans la préface de n'avoir pu exposer les recherches de Denjoy sur le calcul des coefficients d'une série trigonométrique générale, ni celles de H. Bohr sur les fonctions quasi-périodiques. Oserai-je ajouter qu'une autre restriction que l'auteur s'est imposée est de se borner strictement — trop strictement à mon gré — aux séries trigonométriques. Or, certains théorèmes et certaines méthodes n'acquièrent leur véritable importance que dans le cadre plus général de la théorie des séries de fonctions orthogonales. Quelques indications à ce sujet eussent été utiles au lecteur.

L'ouvrage constitue un instrument indispensable pour celui qui veut étudier la théorie moderne des séries trigonométriques. La rédaction est très soignée, elle se distingue par une grande clarté, une grande précision et un sens didactique très marqué.

Après un court aperçu historique sur les débuts de la théorie, l'auteur aborde dans le chapitre I la théorie des séries trigonométriques générales. Les premiers paragraphes sont consacrés à l'étude des critères de convergence; critères nécessaires, tels celui de Cantor: $a_n^2 + b_n^2 \to 0$; critères suffisants, tel le suivant: $a_n \geqq a_{n+1}$, $b_n \geqq b_{n+1}$, $a_n^2 + b_n^2 \to 0$ et ceux que permet d'obtenir la transformation d'Abel; critères nécessaires et suffisants, tels celui de Riemann reliant la convergence de la série

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

à certaines propriétés de la fonction

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} .$$

Le chapitre II traite de la représentation d'une fonction par une série trigonométrique; il établit les conditions nécessaires et suffisantes que Riemann a données pour le développement d'une fonction en série trigonométrique. Il aborde le problème de l'unicité du développement (problème

de Cantor) et la question de savoir quand une série trigonométrique donnée est une série de Fourier (problème de Dubois-Reymond).

Le chapitre III traite de la représentation approchée des fonctions par des polynomes trigonométriques; il donne des formules d'interpolation, étudie la sommation de Féjer et la méthode d'approximation de Tchebychev.

Le chapitre IV traite des suites de Fourier, c'est-à-dire des suites a_n, b_n des coefficients de la série de Fourier; en particulier de leur ordre de grandeur. Il aboutit à la démonstration du théorème de Riesz-Fischer, d'après lequel toute série trigonométrique dans laquelle $\Sigma(a_n^2 + b_n^2)$ converge est la série de Fourier d'une fonction de carré intégrable et aux généralisations de Young et Hausdorff.

L'étude détaillée de la convergence absolue, ordinaire ou uniforme des séries de Fourier fait l'objet du chapitre V. Le lecteur y trouvera tous les critères importants de convergence, anciens ou récents. Les résultats de Kolmogoroff relatifs à la convergence partielle, l'étude de la série conjuguée

$$\sum_1^\infty (b_n \cos nx - a_n \sin nx)$$

et celle du degré d'approximation des séries de Fourier y font chacun l'objet d'un paragraphe.

Le chapitre VI est consacré aux opérations sur les séries de Fourier: addition, multiplication, intégration et dérivation.

Le chapitre VII donne des exemples des diverses singularités que peut présenter une série de Fourier.

Dans le chapitre VIII sont exposées la théorie de l'intégrale de Poisson et celle de l'intégrale de Fourier.

Le chapitre IX expose en 80 pages la théorie des séries trigonométriques doubles qui, comme on le sait, présente sur certains points des différences avec celle des séries simples.

M. Plancherel (Zurich).

Georg Mohr. — **Euclides Danicus.** Amsterdam, 1672. Mit einem Vorwort von Johannes Hjelmsler und einer deutschen Uebersetzung von Julius Pal. — Un vol. in-8° de viii-36 et 42 p. avec planches. Prix: Kr. 2.50. Andr. Fr. Host. Copenhague. 1928.

Ceci est la reproduction, accompagnée d'une traduction allemande, d'un curieux ouvrage de géométrie constructive publié, à Amsterdam, en 1672, par un certain Georg Mohr qui semble avoir été ensuite rapidement oublié bien qu'il ait prouvé, dans la publication en question, que toute construction pouvant être effectuée par la règle et le compas pouvait l'être par le compas seul. On sait que cette assertion est généralement attribuée à Mascheroni qui l'aurait formulée en 1797. Georg Mohr aurait donc une priorité de 125 ans et rien que le fait d'établir ce point explique le travail exécuté, en 1928, par MM. J. Hjelmsler et J. Pal.

Le texte de Mohr a été reproduit en langue néerlandaise avec la typographie de l'époque; la traduction allemande suit avec les notations géométriques modernes. Pour ceux qui sont habitués à la question géomé-

trique et ont quelque peu approfondi la théorie du compas, l'ouvrage aura surtout un caractère historique car ils n'y trouveront que des constructions relativement simples concernant les segments, les triangles, les polygones et leur association très directe avec le cercle. Mais pour ceux qui n'ont jamais eu à réfléchir spécialement à ces constructions purement circulaires, l'esprit de 1672 jouera un rôle initiateur des plus commodes. Je cite l'un des premiers problèmes traités. On demande de doubler un segment rectiligne BA en BAE. Il faut, pour cela, décrire le cercle de centre A et de rayon AB puis porter le rayon sur la circonférence en BC, CD, DE.

Quand on aura examiné, dans cet ordre d'idées, les 78 problèmes que Georg Mohr a poussés jusqu'à la construction des cadrans solaires, on aura déjà une certaine accoutumance à la géométrie du compas et l'exhumation de l'œuvre originale apparaîtra comme une trouvaille des plus intéressantes

A. Buhl (Toulouse).

R. H. Fowler. — **Statistical Mechanics.** The Theory of the Properties of Matter in Equilibrium. — Un vol. gr. in-8° de viii-570 pages. Prix: 35 s. net. Cambridge University Press. 1929.

Grand et magnifique volume. L'auteur est d'une modestie charmante en s'excusant de publier en 1929 un Cours professé à Cambridge en 1923-24. Il espère cependant pouvoir être encore utile à des étudiants. Qu'il se rassure. Pour ma part je puis, au moins, lui certifier qu'en France, les admirables et prodigieuses théories qu'il expose sont encore étrangères, hors l'Institut Henri Poincaré, à nombre d'enseignements magistraux. Aussi peut-on espérer beaucoup de ce livre rédigé dans un anglais facile à lire.

Le génial Einstein est passé par là. Certes, il y a dix ans, on éprouvait précisément quelque gêne à lier les Théories quantiques à la Gravifique, mais les liens n'ont pas tardé à apparaître. C'est un fait maintenant bien connu que les équations de l'Electromagnétisme, tout comme les équations classiques du mouvement des milieux continus, peuvent être liées de la manière la plus immédiate aux transformations d'intégrales multiples, au fond, aux seules notions primordiales d'espace et de continuité, sans que les variétés d'intégration portent ou enferment des singularités. Celles-ci cependant, ne pouvaient être négligées indéfiniment et devaient conduire à la considération de cycles, de résidus, de périodes ne pouvant apparaître que de manière indivisible lors de parcours ou de transformations cycliques; d'où les quanta.

Le sous-titre de l'ouvrage, nous avertissant qu'il s'agit des propriétés de la matière en équilibre, présage aussi le plus grand intérêt. Certes, avec D'Alembert, les travaux virtuels, les forces d'inertie, la Dynamique était déjà ramenée à la Statique, mais ce point de vue est aujourd'hui considérablement élargi. Un gaz, en vase clos, peut sembler en équilibre malgré l'agitation incessante des particules qui le composent; on peut se demander, de même, si toute la Dynamique de l'Univers n'est pas d'accord avec de simples concepts d'équilibre, avec de simples identités analytiques qui n'expriment rien d'autre que *l'existence de ce qui est.* Ce doit être l'une des plus grandes imperfections de l'esprit humain, peut-être même la plus grande, que de se poser des questions de cause et d'origine. La Science ne nous engage pas à persister dans ce travers; elle classe, elle ordonne et tire esthétiquement

la complexité de la simplicité. C'est, du moins, la marche suivie dans cet ouvrage où est invoquée, très explicitement (p. 7), la notion de « satisfaction esthétique » toujours défendue en nos analyses bibliographiques. Cette satisfaction est, sans doute, moins intense que celle que beaucoup ont espéré éprouver en perçant d'originels mystères, mais elle est incomparablement plus raisonnable.

L'outil analytique essentiel est constitué par les équations canoniques de Jacobi-Hamilton, immédiatement associables à l'identité de Poisson et à un théorème d'invariance dû à Liouville. Les variables habituelles, en jeu dans ces équations, les p_i et les q_i, donnent, pour un ensemble de N systèmes, un élément d'hyperespace ou *cellule* d'étendue

$$(dp_1 \ldots dq_s)_1 \ldots (dp_1 \ldots dq_s)_N \ .$$

Un tel produit peut être affecté d'un coefficient K dit *poids* et de facteurs énergétiques.

L'ensemble géométrique et cinématique se complique, on le voit, par factorisation, alors que (postulat fondamental) les énergies doivent se compliquer par addition. Par suite, les facteurs énergétiques sont des exponentielles. On tient ainsi les intégrales multiples, portant sur des facteurs exponentiels, qui jouent, en Mécanique statistique, un rôle absolument fondamental (Gibbs, Maxwell, Boltzmann, ...). On peut arriver à des résultats analogues en employant le Calcul des Probabilités ce que l'auteur ici, évite plutôt, sans cependant dissimuler le parallélisme des choses, mais il faut reconnaître que ce Calcul, notamment par des abus de la formule de Stirling, défigure souvent des résultats auxquels il y aurait grand intérêt à laisser quelque chose de leur forme initiale.

Les premiers exemples de quantification sont donnés sur des cycles élémentaires, à l'aide d'une simple variable complexe z; nul doute que la Théorie des Fonctions ne soit ici appelée à jouer un rôle de plus en plus considérable.

Voilà pour ce qui est des idées absolument essentielles et fondamentales lesquelles, remarquons-le, sont absolument distinctes de celles de la Thermodynamique classique. Il n'en est que plus merveilleux de retrouver bientôt cette Thermodynamique avec ses variantes électriques et toutes ses curiosités symétriques en milieu cristallin. L'entropie, la fonction caractéristique de Planck, la probabilité thermodynamique aboutissent à l'hypothèse de Boltzmann à la fois probabilitaire et entropique.

Il ne nous est pas possible de détailler davantage la splendide analyse de ce volume. Elle se dirige vers la chimie avec les idées de Nernst. Elle traite des gaz parfaits et imparfaits, des constantes diélectriques, diamagnétiques et paramagnétiques, des ions, des électrons, de la constitution des étoiles, de toutes les actions à distance et de leurs mécanismes possibles.

Là encore ce sont les idées de Poincaré qui triomphent et il n'en pouvait guère être autrement dans un livre qui débute par les équations canoniques. Bien des mécanismes peuvent être ingénieusement conçus au sein des phénomènes physiques, mais, de ce que l'un d'eux donne des résultats concordant avec l'observation et l'expérience, il est vain de conclure à la réalité de ce mécanisme qui pourrait toujours être remplacé par d'autres. La phase mécaniste de la Physique a vécu; reste la phase mathématique, c'est-à-dire la phase où agit surtout une pensée particulièrement épurée. Il ne semble

pas, cette fois, que cette phase puisse vieillir et disparaître à son tour, à moins d'imaginer quelque cataclysme général atteignant la Pensée elle-même.

N'oublions pas de mentionner le dernier Chapitre consacré aux nouvelles formes des mécaniques statistiques et qui, contrairement à l'indication trop modeste du début, examine l'état de la question, jusqu'en avril 1928. Il s'agit maintenant de mettre la science précédemment exposée en accord avec les mécaniques ondulatoires, avec les travaux de Schrödinger, Heissenberg, Louis de Broglie, ...; c'est possible. Quelle magnifique unité offre la Science ! Il faut quitter les propriétés des intégrales multiples qui ne relévent guère que des propriétés des déterminants fonctionnels; les équations canoniques et le théorème de Liouville, qui vivent sur des systèmes analogues, demandent également à être élargies. Mais ce sont toujours les formes mathématiques intuitives qui triomphent, par exemple avec les fonctions ondulatoires et les déterminants de Heissenberg. Naturellement, la Théorie des fonctions continue à déployer là toutes ses richesses; c'est ainsi que, dans la théorie électrique des métaux, d'après Sommerfeld, on rencontre une délicieuse application de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Vraiment Einstein a ouvert une voie prodigieusement belle et pénétrante. Et tout s'éclaire d'une lumière de plus en plus vive. Ce qui est nettement déconseillé c'est la théorie mathématique faite, après coup, derrière le langage ordinaire et l'intuition vulgaire; ce qui est recommandé, c'est de ne jamais recourir à l'Analyse sans examiner d'une façon complète la structure et la portée des symboles employés, d'en chercher les conséquences les plus immédiates et de cheminer ainsi, de proche en proche, en observant (c'est ici qu'interviennent l'observation et l'expérience) quels sont les faits physiques qui peuvent s'insérer dans le moule mathématique. L'Univers apparaît alors comme géométrisable; c'est la conception antique, la conception grecque qui est retrouvée sous les formes perfectionnées de l'Analyse moderne. Et de telles conceptions ne sont-elles vraiment adéquates qu'aux recherches mathématiques de la Physique théorique ? Nullement. Ce qui s'impose ainsi est toujours et essentiellement l'idée d'Art. Quel est le véritable artiste qui accepterait de faire de son art le subalterne de ce qui peut s'exprimer d'abord en langage ordinaire et conformément à l'intuition commune ?

Toutefois, ne cherchons pas à dépasser la pensée de M. Fowler qui, dans l'admirable volume qu'il vient d'écrire, a justement évité de tomber dans le verbiage. Félicitons plutôt l'éminent auteur et remercions-le pour le service immense qu'il rend à une discipline, déjà fort belle, par une lumineuse exposition qui attirera vers elle une foule de nombreux et fervents admirateurs.

A. Buhl (Toulouse).

J. Haag. — **Cours complet de mathématiques élémentaires.** Tome IV: *Trigonométrie.* — Un vol. in-8° de 68 pages avec 30 figures; 15 fr.; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1929.

La publication de ce Cours se poursuit, dans l'esprit précédemment indiqué. La trigonométrie apparaît comme très désencombrée, comme très soumise aux généralités de l'esprit géométrique. Les élèves de maintenant

semblent beaucoup plus favorisés que ceux d'il y a trente ou quarante ans. De plus, on remarque ici cette simplicité spéciale qui généralement se révèle quand un livre élémentaire est rédigé par un auteur beaucoup plus savant qu'il ne serait strictement nécessaire.

Bornons-nous à reproduire les titres des subdivisions adoptées:

Chapitre I. Mesure des arcs et des angles. — II. Lignes trigonométriques. — III. Formules d'addition et de multiplication des arcs. — IV. Triangles. — V. Résolution des triangles. — VI. Applications topographiques.

Mentionnons encore que, comme pour les tomes précédents, cet ouvrage sera complété par un recueil d'exercices.

Tome V: *Mécanique.* — Un vol. in-8° de 188 pages avec 116 figures; 25 francs.

Bien que destiné, en principe, aux candidats au baccalauréat, cet ouvrage est appelé à rendre des services à tous les jeunes gens qui veulent s'initier à la Mécanique élémentaire.

Il est divisé en deux parties:

La première partie (Cinématique) comprend six chapitres dont le premier est consacré aux mouvements rectilignes et, en particulier, au mouvement uniforme et au mouvement uniformément varié.

Dans le deuxième, on trouve les définitions et propriétés générales relatives aux mouvements curvilignes.

Le troisième débute par l'étude du mouvement circulaire et se termine par une étude assez approfondie des mouvements vibratoires.

Le chapitre IV traite de la composition des vitesses, et le chapitre V passe en revue les propriétés du mouvement de translation, du mouvement de rotation et du mouvement hélicoïdal d'un corps solide.

Le chapitre VI donne la description des organes élémentaires de la transformation des mouvements: courroies de transmission, engrenages plans et coniques, crémaillère, bielle.

La deuxième partie du livre comprend huit chapitres et deux notes.

Elle débute par un chapitre sur les principes de la Dynamique. L'auteur insiste longuement sur ces principes souvent mal connus des élèves. Il introduit d'abord la notion de force par le moyen de sa mesure statique. Il présente ensuite la notion de masse et arrive enfin au rôle dynamique de la force.

Les chapitres VIII et IX concernent la statique et la dynamique du point matériel libre ou gêné.

Le chapitre X est consacré aux importantes propriétés du travail et de la force vive, avec application au pendule simple ou composé et quelques notions élémentaires, mais précises, sur l'énergie d'élasticité et l'énergie électrostatique.

Le chapitre XI est consacré aux unités et aux calculs numériques en Mécanique. Le chapitre XII expose les principes généraux de la Statique du corps solide.

Le chapitre XIII expose les méthodes de recherche des centres de gravité, et le chapitre XIV traite des machines simples (levier, treuil, poulies, palan, cric, engrenage, plan incliné).

Enfin deux notes donnent respectivement la théorie de la machine d'Atwood et la variation de g avec la latitude.

Quant à la compétence de l'auteur et la facilité avec laquelle il se fera certainement comprendre, nous ne pouvons qu'insister à nouveau sur la simplicité d'exposition déjà signalée en Trigonométrie.

H. F.

Léon Lecornu. — **Théorie mathématique de l'Élasticité** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXV). — Un fascicule gr. in-8° de 52 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

Ce fascicule est d'une belle et très moderne franchise philosophique. Il n'essaie pas de lire, plus ou moins imparfaitement, dans les corps naturels, des équations que l'on finit par n'écrire qu'à grands renforts d'abandons et d'abstractions. Il nous présente, tout de suite, pour l'équilibre d'élasticité des solides isotropes, les équations de Lamé. On sait maintenant ce que l'on veut et peut étudier par l'Analyse proprement dite; on verra, après coup, jusqu'à quel point les résultats mathématiques concordent avec l'expérience. La théorie de Lamé ne va pas sans coefficients λ et μ positifs pour les solides mais non nécessairement pour l'existence des équations contenant ces coefficients. Cette première remarque a donné lieu à des développements étendus dus à Henri Poincaré et repris par les frères Cosserat. L'unicité de la solution du problème d'élasticité est en jeu ainsi que la nature analytique de cette solution; une suite de singularités polaires apparaît pour certaines valeurs du rapport $\lambda : \mu$. Un autre fait singulier accompagne les systèmes triplement orthogonaux de *surfaces isostatiques*, dont la considération semblait commode et élégante à Lamé, alors que, selon Boussinesq, ces surfaces n'existent pas en général.

Le cas des solides anisotropes élargit prodigieusement le champ de ces discussions. Lagrange, Poisson, Cauchy, Navier, W. Thomson, W. Voigt, Clebsch, Barré de Saint-Venant, Lamé, Poincaré, Duhem, ..., sont loin d'être d'accord sur les notions mêmes d'isotropie, d'état naturel, de liaison intérieure.

Voici maintenant la théorie des petits mouvements. Elle a souvent le tort d'admettre que, dans cet état dynamique, les tensions suivent les mêmes lois qu'à l'état statique. Mais les équations statiques de Lamé ont le grand avantage de pouvoir être complétées en vertu du principe de d'Alembert.

Les corps minces se manient d'une manière particulièrement élégante et peuvent notamment être en correspondance avec de certains systèmes rigides; ainsi on sait, depuis longtemps, que le problème de la courbe élastique est analogue à celui du mouvement à la Poinsot.

Les effets thermiques viennent obligatoirement compliquer la théorie élastique; les plus beaux résultats obtenus dans cette voie sont ceux qui ont conservé, autant que possible, le moule dynamique, par exemple par la création de potentiels thermodynamiques. Il y a là de brillantes généralisations auxquelles s'attache sourtout le nom de Pierre Duhem. Et, une fois la Thermodynamique atteinte, ne va-t-on pas arriver à quelque magnifique synthèse de tous les phénomènes physiques ? De puissants esprits ont tenté la chose, non sans obtenir des résultats de grande valeur, mais il semble bien que ce ne soit pas la meilleure voie car la théorie élastique, entendue comme précédemment, manque, à sa base même, ... d'élasticité. Elle semble

extérieure à la Géométrie alors qu'une théorie *universelle* doit englober la Géométrie.

Quoiqu'il en soit, les difficultés, les contradictions nous sont signalées ici par M. Lecornu lui-même. Des efforts magnifiques ont été faits pour surmonter celles-ci. Elles ont occupé d'illustres savants. Revenir sur elles est une besogne qui peut toujours être des plus fécondes. Et puis il y a un point de vue pratique d'une prodigieuse importance.

A. Buhl (Toulouse).

Paul Appell. — **Sur la décomposition d'une Fonction méromorphe en éléments simples** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXVI). — Un fascicule gr. in-8° de 38 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

M. P. Appell nous présente ici une œuvre d'une harmonie et d'une fraîcheur délicieuses. C'est un retour vers des idées de jeunesse qui d'ailleurs furent aussi celles de Poincaré. Depuis, la Théorie des fonctions méromorphes, comme nous le disons à quelques pages d'ici, en analysant le livre de M. Rolf Nevanlinna, a fait beaucoup de progrès, quant aux propriétés les plus générales possibles concernant les singularités, mais non sans quelque oubli de propriétés exactes particulièrement esthétiques qu'on trouve liées à la double périodicité ou à l'automorphisme. Et, de plus, le théorème général de Mittag-Leffler, sur la décomposition en éléments, n'a-t-il pas été suggéré par la décomposition analogue qui se produisait à propos des fonctions elliptiques les plus simples.

Ici l'exposition s'élève du simple au complexe avec le plus net esprit de méthode. Elle part des fractions rationnelles $R(x)$ puis des fonctions $R(\sin x, \cos x)$, $e^{\omega x} R(x)$, $e^{\omega x} R(\sin x, \cos x)$. Dans chaque cas, il y a un élément simple. C'est du pur Hermite et l'idée paraît tout de suite si féconde qu'on est porté, dès que l'on conçoit de nouvelles fonctions, à rechercher quel est leur élément simple. Peut-être Hermite a-t-il pensé à l'un des cas simples précédents après avoir décomposé des expressions plus compliquées mais c'est là un fait scientifique, des plus courants, qui n'empêche point d'admirer après coup un enchaînement tel que celui que M. Appell nous présente.

Les fonctions elliptiques proprement dites, ou de première espèce, admettent l'élément simple Z qui, isolé, n'est pas doublement périodique; un cas analogue est fréquent et a été l'objet d'une classification due à Poincaré.

Pour les fonctions de seconde espèce, ou fonctions à multiplicateurs constants, l'élément simple se construit aisément à l'aide de la fonction H. Pour les fonctions de troisième espèce, ou fonctions à multiplicateurs exponentiels, l'élément simple est une certaine série à la fois exponentielle et trigonométrique en cotangentes.

Si $F(x, y) = 0$ est une équation algébrique, une fonction rationnelle $R(x, y)$ peut être décomposée en éléments simples; ceci exige l'emploi d'intégrales abéliennes. Ceci s'étend aussi, sur la surface de Riemann, aux fonctions à multiplicateurs et conduit d'autre part aux fonctions automorphes et aux éléments simples constitués par les fonctions zêtafuchsiennes de Poincaré.

Enfin, dans le même ordre d'idées, on peut considérer et décomposer des fonctions harmoniques de variables réelles admettant un, deux ou trois groupes de périodes.

On voit l'immense intérêt de ces synthèses. Presque tout ce qui se trouve dans le présent fascicule a déjà été publié ou tout au moins indiqué de manière quelque peu didactique, par l'illustre et sympathique auteur, soit dans ses *Fonctions elliptiques* (publiées avec E. Lacour et R. Garnier), soit dans sa *Théorie des Fonctions algébriques et de leurs intégrales* (publiée avec E. Goursat) soit dans sa *Mécanique rationnelle*. Mais il est doublement précieux d'avoir maintenant, à peine en quarante pages, cette brillante synthèse du problème de la décomposition. Et tout le monde sait que M. Appell est à la retraite administrativement parlant. On pourrait souhaiter des productions de ce genre à nombre de collègues encore en activité.

A. Buhl (Toulouse).

G. Cerf. — **Transformations de contact et Problème de Pfaff** (Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat; fasc. XXXVII). — Un fascicule gr. in-8° de 58 pages. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

Ce fascicule illustre avec élégance les *Leçons sur le Problème de Pfaff* de M. E. Goursat, les *Leçons sur les Invariants intégraux* de M. E. Cartan et le Tome II des *Transformationsgruppen* de Sophus Lie, pour ne citer que trois ouvrages de toute première importance. Au fond, ce sont les méthodes de Pfaff et de Grassmann qui triomphent avec les multiplications et les dérivations extérieures. Cela revient d'ailleurs, comme le remarque M. Cerf, aux Formules stokiennes et à tout ce qui peut servir de base à la Gravifique; bref l'œuvre est dans l'immense courant synthétique qui emporte aujourd'hui la Géométrie et la Physique géométrisée. Au point de vue logique tout cela aurait pu exister sans Einstein; c'était en puissance dans Pfaff, Grassmann, Riemann, Lie. Au point de vue réel, il a fallu un Einstein pour animer des constructions théoriques qui semblaient mortes à beaucoup d'excellents esprits.

On sait qu'une transformation T, en x, z, p; X, Z, P, est dite *de contact* quand, avec

$$\omega = dz - p_i\,dx_i\ , \qquad \Omega = dZ - P_i\,dX_i$$

on a $\Omega = \rho\omega$. Réduire cette dernière équation à des formes canoniques et déterminer toutes les T c'est considérer un cas particulier des nombreux problèmes, traités par M. Cartan, en lesquels les inconnues sont des formes de Pfaff et qui peuvent, par exemple, donner naissance aux groupes finis ou infinis. Rappelons aussi que les intégrales multiples portant sur des formes de Pfaff conduisent, en particulier, aux équations de l'électromagnétisme. Vraiment les synthèses tiennent ici du prodige et avec un appareil analytique au fond très minime. Le calcul des formes de Pfaff conduit encore aux parenthèses de Poisson (liées aux équations canoniques) et à des généralisations très vastes de ces parenthèses. Suit la théorie des groupes de fonctions. Enfin les transformations de contact peuvent être *prolongées* de manière à conserver des contacts d'ordres de plus en plus élevés.

Elles peuvent être remplacées par des transformations concernant seulement les multiplicités intégrales de certaines équations ou de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles; c'est dans cette direction qu'on retrouve le Problème de Bäcklund traité par M. Goursat, notamment dans le fascicule VI du *Mémorial*. Si nous rappelons que ce Calcul pfaffien et le Calcul différentiel absolu sont de très proches parents, à quels horizons mathématiques la vue émerveillée n'atteint-elle pas ?

A. Buhl (Toulouse).

F. Bedeau. — **Le Quartz piézo-électrique et ses applications dans la technique des ondes hertziennes** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. VI). — Un fascicule gr. in-8° de 64 pages et 18 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1928.

Voici encore un exposé bien intéressant qui pourrait nous ramener aux vues générales sur les phénomènes physiques dont il a été question, un peu plus haut, à propos de la *Théorie mathématique de l'Elasticité* de M. Léon Lecornu. Les solides, surtout cristallins et plus particulièrement le spath, le quartz, s'électrisent à la compression: c'est la *piézo-électricité*. Elle présente les plus grandes analogies avec la *pyro-électricité* due à des variations de température. Ces deux phénomènes électriques sont même souvent malaisés à séparer car une variation de température peut entraîner une dilatation ou une contraction d'effet piézo-électrique.

Ce qu'il y a de remarquable est que ces choses semblent être comme un raccourci de toute l'histoire de l'électricité; on savait, depuis la plus haute antiquité, que l'ambre frottée attirait les corps légers; mais ensuite quelle extraordinaire stagnation jusqu'aux théories et applications électriques modernes. De même, depuis un temps immémorial, on avait remarqué, dans l'Inde et dans l'île de Ceylan, que la tourmaline jetée dans le feu avait la propriété d'attirer les cendres et c'était là beaucoup plus de la piézo que de la pyro-électricité. Mais il faut les travaux modernes des frères Curie pour que de tels phénomènes soient étudiés systématiquement et acheminés vers de magiques applications. Lippmann essaya d'abord des principes conservatifs de la Thermodynamique et découvrit la piézo-électricité inverse. Pendant la guerre, Langevin produisit des ultra-sons en faisant vibrer un cristal de quartz également capable de les détecter; ces ultra-sons pouvant se réfléchir au fond de la mer, on avait un merveilleux procédé de sondage. Puis l'Américain Cady construisit un condensateur à lame de quartz qui fut un oscillateur à ondes entretenues et stabilisées; ce quartz se prêtait très bien à l'étalonnement des longueurs d'onde. Au point de vue spéculatif, Voigt donnait de remarquables aperçus théoriques. Dans le présent fascicule on trouve les développements mathématiques se rapportant habituellement aux phénomènes de résonance. Le sujet est essentiellement élégant; d'une part les symétries cristallines, d'autre part les graphiques généralement très purs se rapportant tantôt aux vibrations élastiques, tantôt aux ondes électromagnétiques. La réunion de ces deux genres d'oscillations se fait, grâce au quartz, avec une facilité qui donne à la question une place de premier ordre parmi celles, cependant si nombreuses, que la Physique met actuellement à l'ordre du jour.

A. Buhl (Toulouse).

E. Aubel et A. Genevois. — **L'état actuel de la question des ferments** (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. VII). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages et 6 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

Le titre de cette œuvre semble la placer assez loin de toute préoccupation mathématique et nous pourrions ne la mentionner que pour être complet. Toutefois, à y regarder de près, elle n'est pas sans entraîner quelques équations différentielles simples, notamment dans un chapitre consacré à la cinétique des ferments. Il y a des vitesses de combinaison et des quantités de produits de fermentation variant exponentiellement avec le temps, du moins lorsque la molécule de ferment se combine à une molécule de substrat; mais s'il y a deux molécules de substrat, la loi exponentielle est remplacée par une loi rationnelle. Plus loin (p. 21), une vitesse d'hydrolyse donne une équation différentielle plus complexe bien que toujours à variables séparées.

Les lois fondamentales de la cinétique chimique s'appliquent aux fermentations; celles-ci apparaissent tout aussi réversibles que certains équilibres. Les ferments peuvent être considérés comme électrolytes, comme colloïdes. Beaucoup de réactions biologiques se passent sur des surfaces de discontinuité douées de propriétés catalytiques. Ici quelques lignes, dues à M. H. Devaux, contiennent une théorie quasi-géométrique du rôle de certains catalyseurs ou de certains ferments. Supposons qu'une surface solide ait été formée dans une solution de glucose. Si, par des lavages, on débarrasse cette surface de toute trace de glucose elle peut néanmoins conserver un arrangement moléculaire qui en fait un lieu d'affinité pour le glucose; en fixant du glucose, elle peut modifier une foule de réactions chimiques. Voilà vraiment une idée très simple, très belle et toute pénétrée, en effet, de sens géométrique.

N'insistons pas sur des questions récentes concernant, par exemple, le ferment lactique du muscle. Vraiment toute compétence nous abandonne mais non sans éveiller le souvenir de la fameuse tirade où Pascal opposait l'esprit de finesse et l'esprit de géométrie. Rien de plus fin que l'exposé chimico-biologique de MM. Aubel et Genevois, non seulement, sans aucun doute, de l'avis des chimistes et des biologistes qui seront vraiment capables de le juger, mais aussi de l'avis d'un géomètre auquel les auteurs font comprendre, une fois de plus, que la belle science n'est pas toujours obligatoirement faite de formules.

A. Buhl (Toulouse).

René Dubrisay. — **Applications de la mesure des tensions superficielles à l'analyse chimique.** Préface de M. H. Le Chatelier (Mémorial des Sciences physiques dirigé par Henri Villat et Jean Villey; fasc. VIII). — Un fascicule gr. in-8° de 48 pages et 7 figures. Prix: 15 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1929.

Ce fascicule ne manque point d'analogie avec le précédent bien qu'il soit beaucoup plus accessible à l'analyse mathématique. Il commence même par une définition énergétique des plus précises.

Pour augmenter de ds la surface libre d'un liquide, Gauss envisage une quantité de travail égale à $d\mathcal{T} = \sigma\, ds$. La quantité σ est la tension super-

ficielle; elle est mesurable. Elle peut même être mesurée de bien des manières en faisant intervenir la capillarité, l'adhérence d'un disque, les rides superficielles, les veines oscillantes, la pression intérieure des bulles, la formation des gouttes. Il y a une *énergie superficielle* liée à la température de l'expérience et à la température critique par la formule fondamentale d'Eötvös; les tentatives de vérifications numériques ont abondé. Beaucoup sont récentes notamment avec Rideal qui, en 1926, a publié une *Introduction à la Chimie des surfaces*. L'expression seule est jolie.

Dans une dissolution, la composition n'est pas la même près de la surface que dans la masse; il y a *adsorption*, phénomène dont Gibbs a essayé de donner une théorie thermodynamique. Ces généralités étant admises, il reste à se placer au point de vue pratique et à tenter des dosages concernant des solutions, des mélanges de liquides, des associations colloïdales, ...; les méthodes déjà citées pour l'évaluation des actions capillaires varient encore au gré des nécessités industrielles.

Pour la détermination du titre des solutions alcooliques on a la méthode du compte-gouttes de Duclaux. Certains acides gras et leurs sels abaissent énormément la tension superficielle; la formation de mousse est parfois utilisée avec une grande commodité. Avec des papiers filtres plongés dans les liquides on obtient des ascensions pour lesquelles l'action capillaire n'est pas toujours seule en jeu mais qui permettent cependant des discriminations d'une exactitude souvent étonnante. Les analyses de liquides organiques normaux ou pathologiques peuvent, de par l'emploi des méthodes précédentes, gagner beaucoup en précision; le rôle même de ces liquides dans les organismes vivants s'éclaire de vues des plus ingénieuses. Pour l'heure actuelle ces vues sont peut-être trop nombreuses ; on se sent aux prises avec beaucoup de problèmes particuliers, mais c'est en classant ceux-ci avec patience et méthode, comme le fait M. R. Dubrisay, qu'on perfectionnera, en les simplifiant, les grandes lignes que ces séduisants aperçus comportent certainement.

A. Buhl (Toulouse).

A. Einstein. — **Sur l'Electrodynamique des Corps en mouvement** (Collection des « Maîtres de la Pensée scientifique » publiée sous la direction de Maurice Solovine). Traduction M. Solovine avec un portrait de l'Auteur. — Un volume petit in-8° de 56 pages. Prix: 8 francs. Gauthier-Villars & Cie. Paris, 1925.

Nous regrettons de n'avoir pas consacré plus tôt quelques lignes à ce Mémoire cependant si connu, Mémoire publié en 1905 dans les *Annalen der Physik*, qui ne traite que de ce qu'on a appelé depuis la Relativité restreinte mais qui fut le germe d'une floraison de publications sans précédents. Toutefois, M. Solovine n'a pas cru faire œuvre trop tardive en publiant, en 1925, une traduction sur laquelle nous revenons, dans le même ordre d'idées, en 1929. C'est que la Science ne conservera pas seulement une Théorie d'Einstein, mais des Théories einsteiniennes de plus en plus perfectionnées, telle celle publiée officiellement par le Maître il y a quelques mois seulement. Ces Théories ne pourront pas plus prétendre à la perfection que n'importe quelle œuvre humaine et pourtant elles marquent une étape nouvelle dans l'Evolution, par un esprit de synthèse d'une puissance inconnue jusqu'à

elles. Il faut donc suivre ces Théories et il ne sera sans doute jamais vain de remonter jusqu'à la première.

Rappelons que celle-ci contenait une partie cinématique sur la notion de simultanéité, la relativité des longueurs et des temps, le sujet se poursuivant jusqu'à une généralisation du théorème d'addition des vitesses. Suivait une partie électrodynamique sur la transformation des équations de Maxwell, le Principe de Döppler, l'aberration, l'énergie des rayons lumineux et la Dynamique de l'électron lentement accéléré.

Ce qu'il y a de fondamental en tout ceci, c'est la transformation de Lorentz.

L'inertie d'un corps dépend-elle de sa capacité d'énergie ? Tel est le titre d'un second exposé, beaucoup plus court que le précédent, qui termine le petit volume. Il semble que la radiation transporte de l'inertie entre les corps émissifs et les corps absorbants et l'illustre auteur exprime l'espoir d'une vérification de cette assertion tentée avec des substances dont la capacité d'énergie est extrêmement variable (par exemple les sels du radium).

La Science a marché si vite que ces considérations semblent, en moins d'un quart de siècle, avoir acquis comme un air archaïque. Mais nous aurons indéniablement à nous appuyer sur elles pour examiner des productions plus actuelles.

A. Buhl (Toulouse).

A. Defretin. — **Cours d'électricité industrielle.** Tome I : **L'électricité dans la Science de l'ingénieur.** — Un vol. in-8°, de 582 pages avec de nombreuses figures et 66 photographies hors-texte; broché, Fr. 95; cartonné, Fr. 100; Librairie Scientifique Hermann & Cie, Paris, 1929.

On ne peut mieux faire pour caractériser l'ouvrage de M. Defretin que de donner un extrait de la préface de M. Janet:

« Le développement rapide de l'industrie électrique a posé, tant dans le domaine de la construction que dans celui de l'exploitation une série de problèmes de plus en plus complexes à mesure qu'augmentaient la variété et la puissance des applications mises en jeu. Les milieux intéressés ont d'abord été au plus pressé en utilisant les renseignements que leur fournissaient au jour le jour les revues techniques. Mais, bientôt, la nécessité d'un effort plus systématique s'est fait sentir et il a fallu envisager l'organisation d'un enseignement didactique des matières que la pratique avait peu à peu accumulées. Des cours d'électricité industrielle ou, comme on les a appelés, d'électrotechnique soit générale soit appliquée ont donc pris naissance de divers côtés. C'est à cette catégorie qu'appartient l'ouvrage que nous présentons aujourd'hui au public.

L'auteur n'a pas, en prenant un poste dans l'enseignement, quitté ses occupations dans l'industrie.

Nul mieux que lui n'était placé pour parler de l'Electricité dans l'industrie. La variété des essais effectués par lui-même et sous sa direction lui ont permis, tout en donnant l'ampleur nécessaire aux théories du fonctionnement des machines, de ramener à chaque pas le lecteur vers des applications pratiques réellement vécues.

C'est ainsi que dans la première partie de l'ouvrage, il a en une sorte de synthèse, rassemblé l'explication des phénomènes fondamentaux qui sont

tout le matériel électrique moderne, et couronné cet exposé par les idées éminemment pratiques du savant ingénieur BOUCHEROT sur la dualité des puissances réelles et des puissances réactives.

Dans la deuxième partie, l'étude de toutes les machines électriques est portée à un niveau élevé, mais sans jamais perdre de vue les réalités. Ce sont, bien entendu, les appareils à courant alternatif qui font l'objet des développements les plus simples, et toutes les questions modernes concernant par exemple les moteurs asynchrones, sans ou avec collecteurs, les redresseurs, etc..., sont traitées scientifiquement, mais sans emploi de calculs fastidieux, et en faisant appel, au contraire, à l'esprit physique dans lequel l'ensemble de l'ouvrage est rédigé. »

F. BOUNY. — **Lecons de Mécanique rationnelle.** Tome II : **Dynamique du Point. Dynamique des systèmes.** Avec 164 exercices et leurs solutions. — Un vol. in-8° de VIII-659 p. avec 124 fig.; Fr. 90; Librairie Albert Blanchard, Paris, 1929.

Cet ouvrage correspond, avec de légers compléments, aux leçons professées par M. Bouny à l'Ecole des mines et de métallurgie de la Faculté technique du Hainaut, à Mons. Il s'adresse à des jeunes gens n'ayant jamais étudié la mécanique théorique, mais il est suffisamment développé pour fournir toutes les théories dont l'étudiant peut avoir besoin dans la suite de ses études d'ingénieur.

Après avoir examiné, dans le Tome I, les principes du calcul vectoriel, la cinématique et la statique, l'auteur consacre le Tome II à la dynamique du point et à la dynamique des systèmes. La mécanique des milieux continus fera l'objet d'un volume spécial.

Son exposé se rattache aux méthodes classiques françaises et plus spécialement au magistral traité de M. P. Appell. Sur quelques points toutefois il a recours à des méthodes différentes. Il utilise la méthode vectorielle lorsqu'elle présente un avantage au point de vue de la simplicité.

L'auteur a continué à donner, à la fin de chaque chapitre, une série d'exercices avec des indications sur leurs solutions.

E. J. DIJKSTERHUIS. — **De Elementen van Euclides.** Deel I : De ontwikkeling der Grieksche wiskunde voor Euclides. Boek I der Elementen. (Historische Bibliotheek voor de exacte Wetenschappen). — Un vol. in-8° de 220 p. avec 44 fig.; relié, Fl. 4,50; P. Noordhoff, Groningue, 1929.

H. J. E. BETH. — **Inleiding in de niet-euclidische Meetkunde of historischen Grondslag.** — (Historische Bibliotheek voor de exacte Wetenschappen.) — Un vol. in-8° de 214 pages avec 77 figures; relié, Fl. 4,50; P. Noordhoff, Groningue, 1929.

Sous le titre « Historische Bibliotheek voor de exacte Wetenschappen », la librairie P. Noordhoff, à Groningue, va faire paraître une série de monographies qui viendront compléter d'une manière très heureuse les traités de mathématiques qu'elle a publiés au cours de ces dernières années.

Le premier volume sera consacré aux Eléments d'Euclide. Dans le premier fascicule, qui vient de paraître, l'auteur donne un aperçu de la science grecque avant Euclide, puis il étudie, en les commentant d'après les travaux les plus récents, le Livre I d'Euclide.

Dans le second volume M. Beth donne un aperçu de la Géométrie non-euclidienne envisagée dans son développement historique. Son exposé fournit aux jeunes géomètres hollandais une excellente introduction à l'étude des fondements de la Géométrie.

F. F. P. Bisacre. — **Praktische Infinitesimalrechnung,** berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. Trefftz, herausgegeben von Ernst König. — Un vol. in-8° de 364 pages, avec 104 fig.; relié, RM. 18; B. G. Teubner, Leipzig, 1929.

Cet ouvrage, traduit de l'anglais, a pour but de donner une première initiation au calcul infinitésimal à l'usage des étudiants en sciences physiques et des élèves ingénieurs. Suivant l'usage adopté dans les manuels anglais, il renferme de nombreux exercices et problèmes, avec l'indication des résultats. L'auteur a eu soin de les choisir de préférence dans le domaine des applications pratiques, notamment en physique et en mécanique.

Signalons une innovation intéressante dans un ouvrage de ce genre. Ce sont les portraits de quelques savants célèbres: Képler, Néper, Descartes, Newton et Leibniz, pour les mathématiques; Volta, Carnot, Henry, Clausius, Kelvin, Maxwell, Faraday et Joule, pour la physique; Graham, van't Hoff, Guldberg et Gibbs, pour la chimie physique.

L. E. Dickson-E. Bodewig. — **Höhere Algebra,** autorisierte deutsche Ausgabe von L. E. Dickson « Modern Algebraic Theories ». — Un vol. in-8° de 239 p. avec 3 fig.; relié, RM. 14; B. G. Teubner, Leipzig, 1929.

En 1926, M. L. E. Dickson, l'un des maîtres de l'Algèbre moderne, a publié, sous le titre *Modern algebraic Theories*, une introduction à l'algèbre supérieure. Son ouvrage a remporté un réel succès; aussi faut-il savoir gré à la Maison Teubner d'avoir entrepris la publication d'une édition allemande.

Dans une première partie l'auteur présente les propriétés essentielles de la théorie des formes et des invariants algébriques. Puis il passe aux groupes de substitutions, aux corps algébriques et aux groupes qui se rattachent à une équation algébrique. Ces notions une fois établies, il peut aborder la résolution algébrique des équations, la division du cercle, les constructions à l'aide de la règle et du compas, ainsi que les groupes polyédriques.

Cet ouvrage constitue un excellent guide pour tous ceux qui désirent s'initier aux théories de l'algèbre moderne.

H. F.