

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES OVALES DE DESCARTES
Autor: Dufour, M.
Kapitel: II. — Normale a l'ovale.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22597>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.12.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

D'autre part,

$$A_0 A' = \lambda_2 \cdot F_2 A = \lambda_1 (4c - F_2 A) \quad \text{d'où} \quad F_2 A = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

$$B_0 B = \lambda_2 \cdot F_2 B = \lambda_1 (F_2 B - 4c) \quad \text{d'où} \quad F_2 B = \frac{4\lambda_1 c}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Par suite

$$r = \frac{F_2 C}{2} = \frac{F_2 A + F_2 B}{4} = \lambda_1 c \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

Désignons par F_s le foyer singulier; ses distances aux trois foyers ordinaires sont ¹

$$F_s F_1 = \frac{2\lambda_2^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_2 = \frac{2\lambda_1^2 c}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}, \quad F_s F_3 = 2 \frac{d^2}{c} \cdot \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}.$$

F_s est extérieur à l'intervalle $F_1 F_2$ et placé du côté de F_1 .

II. — NORMALE A L'OVALE.

L'ovale étant donnée par l'équation $\lambda\rho + \lambda'\rho' = h$ rapportée à deux foyers F et F' , nous prenons sur la courbe un point I ,

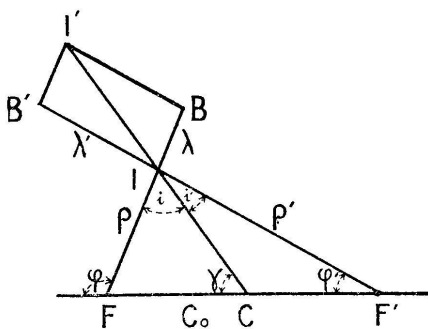


Fig. 4.

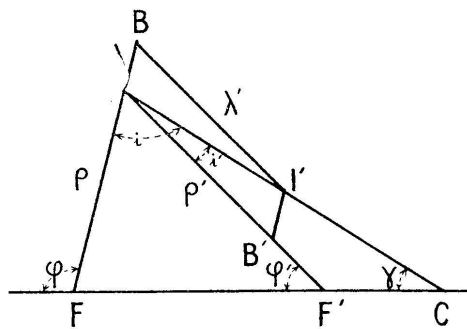


Fig. 5.

nous portons sur les rayons vecteurs FI et $F'I$ des segments $IB = \lambda$ et $IB' = \lambda'$, et nous complétons le parallélogramme $BIB'I'$ (fig. 4 et 5): sa diagonale II' est la normale à l'ovale.

¹ En prenant F_s pour origine, l'équation cartésienne de l'ovale prend une forme où $F_s F_1$, $F_s F_2$ et $F_s F_3$ interviennent de façon symétrique, se prêtant de façon commode à l'étude de la courbe.

La normale rencontre l'axe FF' en un point C situé entre F et F' si λ et λ' sont de même signe (fig. 4) et en dehors de l'intervalle FF' si λ et λ' sont de signe contraire (fig. 5). Le tableau des équations bipolaires montre que pour l'ovale intérieure, la normale passe entre F_1 et F_2 et que pour l'ovale extérieure, elle rencontre l'axe en des points extérieurs à l'intervalle $F_1 F_2$.

Soient i , i' et γ les angles que fait la normale avec les rayons vecteurs et avec l'axe FF'. Les deux triangles CFI et CF'I nous donnent

$$\frac{CF}{\rho} = \frac{\sin i}{\sin \gamma} \quad \text{et} \quad \frac{CF'}{\rho'} = \frac{\sin i'}{\sin \gamma} .$$

D'où

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{\sin i}{\sin i'} \cdot \frac{\rho}{\rho'} .$$

Dans le triangle IBI'

$$\frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} .$$

Donc

$$\frac{CF}{CF'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} .$$

Le rapport des segments déterminés sur FF' par la normale à l'ovale est égal au produit du rapport des rayons vecteurs adjacents par un facteur constant.

Réciproquement, si la normale à une courbe détermine sur la droite passant par deux points fixes F et F' deux segments dont le rapport est égal au produit du rapport des deux rayons vecteurs adjacents par un facteur constant, la courbe est une ovale de Descartes. En effet, si

$$\frac{FC}{F'C} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \cdot \frac{\rho}{\rho'} ,$$

nous pouvons construire sur les directions des rayons vecteurs un parallélogramme de côtés égaux à λ et λ' .

Si nous connaissons le point d'intersection C d'une normale avec l'axe, nous connaissons le rapport $\rho : \rho'$ et, si nous écrivons l'équation de la courbe sous la forme

$$\left(\lambda \frac{\rho}{\rho'} + \lambda' \right) \rho' = h ,$$

nous pouvons déterminer ρ' et par suite ρ . Alors le point I est connu et CI est la normale cherchée.

Pour trouver l'angle γ de la normale avec l'axe, projetons le contour II'B sur l'axe focal et sur une droite qui lui soit perpendiculaire. Désignant par φ et φ' les angles des rayons vecteurs avec l'axe, nous obtenons

$$\text{II}' \cos \gamma - \lambda \cos \varphi - \lambda' \cos \varphi' = 0, \quad \text{II}' \sin \gamma - \lambda \sin \varphi - \lambda' \sin \varphi' = 0.$$

D'où

$$\text{tg } \gamma = \frac{\lambda \sin \varphi + \lambda' \sin \varphi'}{\lambda \cos \varphi + \lambda' \sin \varphi'}.$$

III. POINTS OU L'OVALE PRÉSENTE UN MAXIMUM OU UN MINIMUM DE COURBURE.

1. — *Sommets de l'ovale.*

Par raison de symétrie, les sommets situés sur l'axe correspondent à un maximum ou à un minimum de courbure.

1. *Construction du centre de courbure relatif à un sommet.* — Si le point I (fig. 4 et 5) se rapproche indéfiniment du sommet A, le point C, intersection de la normale en I avec FF', tend vers une position limite C₀ qui est le centre de courbure en A, puisque par raison de symétrie, ce centre de courbure doit se trouver sur FF' et on a

$$\frac{C_0 F}{C_0 F'} = \frac{|\lambda'|}{|\lambda|} \frac{C_0 A}{C_0 A'}.$$

Le point C₀ divisant FF' dans un rapport donné se détermine par une construction bien connue et cette construction est applicable à l'ellipse ($\lambda = \lambda'$) et à l'hyperbole ($\lambda = -\lambda'$).

2. *Sommets de l'ovale intérieure.* — Quand le point I se déplace sur une ovale intérieure à partir du sommet A₁, voisin du foyer F₁, ρ_1 augmente et l'équation de la courbe $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ montre que ρ_2 diminue. Alors $\rho_1 : \rho_2$ augmente, ainsi que CF₁ : CF₂